પ્રકરણ 17

સંભાવના

"It is not certain that everything is uncertain."
"Contradiction is not a sign of falsity nor the lack of concentration a sign of truth." – ***Pascal***

17.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે સામાન્ય બોલચાલની ભાષામાં 'સંભાવના', 'તક', 'મોટે ભાગે', 'શક્યતા છે' વગેરે શબ્દોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

(1) ટેલિવિઝન કે રેડિયો પર હવામાન ખાતા તરફથી આગાહી થાય છે કે, ''જામનગર અને દક્ષિણ ગુજરાતમાં બે દિવસમાં ભારે વરસાદ થવાની **શક્યતા** છે''.

(2) રેલવે-સ્ટેશન પર આપણે ''મુંબઈથી અમદાવાદની ટ્રેન લોકશક્તિ તેના નિયત સમય કરતાં 10 મિનિટ મોડી આવવાની **શક્યતા** છે'' એવી જાહેરાત સાંભળીએ છીએ.

(3) આજની મેચમાં ભારત ટૉસ જીતે તેની **શક્યતા** 70-30 છે.

(4) બોર્ડની પરીક્ષામાં આપણી સ્કૂલની નિકિતા પ્રથમ આવશે તેવી **શક્યતા** છે.

(5) ડુંગળીના ભાવ નીચા ઊતરે તેવી **શક્યતા** ઓછી છે.

આવાં વિધાનો કોઈ ચોક્કસ બનાવ બનશે કે નહિ તે જાણવા માટેનું વલણ દર્શાવે છે. પરંતુ **સંભાવના** શબ્દ એ શક્યતા શબ્દનો બીજો પર્યાય નથી. અશક્યતાના વિકલ્પમાં, આપણને તે કેટલા અંશે અશક્ય છે તે જાણવાનું પણ ગમે છે. ઉત્પાદન કરતા એકમને સ્થાપતા પહેલાં ઉદ્યોગસાહસિક એ ઉત્પાદિત વસ્તુ કેવી રીતે વેચાશે તેનો પણ વિચાર કરે છે. ઉજાણી પર જતાં પહેલાં વરસાદની શક્યતા જાણવી એ આપણને મદદરૂપ થાય છે. સંભાવનાનો અભ્યાસ આવી બાબતોમાં મદદ કરે છે. કોઈ પણ બનાવમાં જેનું સાચું પરિણામ ચોક્કસ રીતે અનુમાન કરી શકાતું નથી તેવાં પરિણામોનું ગાણિતિક વિશ્લેષણ કરવામાં સંભાવના મદદ કરે છે. આ અચોક્કસ પરિસ્થિતિમાં અચોક્કસતાનું માપ મેળવી શકાય છે.

રમતના સિદ્ધાંતોમાંથી શરૂ થયેલું સંભાવનાશાસ્ત્ર, ભૌતિક વિજ્ઞાન, વિનયન, જીવવિજ્ઞાન, તબીબી વિજ્ઞાન, હવામાન ખાતામાં વગેરે શાખાઓમાં વિસ્તરેલું છે અને દરેક શાખામાં ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

17.2 સંભાવના – એક પ્રાયોગિક અભિગમ

અગાઉના ધોરણમાં આપણે સિક્કો ઉછાળવાની રમત, તાસનાં પત્તાં રમવાની રમત, પાસો ફેંકવાની રમત વગેરેમાં શક્યતા(સંભાવના)ની કલ્પના તો કરીએ જ છીએ અને તેનાં પરિણામો જોયાં છે. આ રીતે અનાયાસે આપણે 'સંભાવના' શબ્દથી પરિચિત થયાં છીએ. હવે આપણે પ્રયોગમાં કોઈ ચોક્કસ પરિણામની શક્યતા કેટલી છે તે શીખીશું.

Blaise Pascal (1623-1662)

Pierre de Fermat (Born : 17 Aug. 1601 Died : 12 Jan. 1665, France)

The concept of probability developed in a very strange manner. In 1654, a gambler Chevalier de Mere, approached the well-known 17th century French philosopher and mathematician Blaise Pascal regarding certain dice problems. Pascal became interested in these problems, studied them and discussed them with another French mathematician, Pierre de Fermat. Both Pascal and Fermat solved the problems independently. This work was the beginning of Probability Theory.

The first book on the subject was written by the Italian mathematician, J. Cardan (1501-1576). The title of the book was 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae), published in 1663. Notable contributions were also made by mathematicians J. Bernoulli (1654-1705), P. Laplace (1749-1827), A. A. Markov (1856-1922) and A. N. Kolmogorov (born 1903).

પ્રવૃત્તિ 1 : કોઈ એક સમતોલ સિક્કો લો. તેને પાંચ વખત ઉછાળો અને છાપ (Head) તથા કાંટો (Tail) કેટલી વખત ઉપર આવે છે તે નોંધો. નીચેના કોષ્ટકમાં અવલોકનો નોંધો :

કોષ્ટક 17.1

સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નો	સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ (H) આવે તે સંખ્યા	સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો (T) આવે તે સંખ્યા
5		

હવે, ઉપરનાં અવલોકનો પરથી નીચે આપેલ સૂત્ર પ્રમાણે ગણતરી કરીએ :

$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}} \quad \text{અને} \quad \frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

હવે સિક્કો દસ વખત ઉછાળો અને ઉપરની રીતે જ અવલોકનોની નોંધ કરો અને ફરીથી ઉપરના ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

20 વખત, 25 વખત આ જ રીતે સિક્કાને ઉછાળવાના પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરો અને સિક્કાની ઉપરની બાજુ આવતી છાપ અને કાંટાની સંખ્યા નોંધો તથા તેમના આનુષંગિક ગુણોત્તર શોધો.

જેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નો વધુ તેમ ગુણોત્તરની કિંમત 0.5ની નજીક અને નજીક આવતી જશે.

પ્રવૃત્તિ 2 : વર્ગમાં 3 અથવા 4 વિદ્યાર્થીઓનાં જૂથ પાડો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 25 વખત સિક્કો ઉછાળે છે. જૂથના બીજા વિદ્યાર્થીઓ સિક્કા પર છાપ કે કાંટો આવે તે અવલોકનો નોંધશે. યાદ રાખો કે સિક્કો દરેક જૂથમાં સમતોલ હોવો જોઈએ. દરેક જૂથમાં એક જ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે તેમ માનો. સમતોલ સિક્કો એટલે જ્યારે સિક્કાને ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ અથવા કાંટો આવવાની શક્યતા સરખી રહે.

હવે કોષ્ટક 17.2 તૈયાર કરો.

કોષ્ટક 17.2

જૂથ	છાપની સંખ્યા	કાંટાની સંખ્યા	$\frac{\text{છાપની કુલ સંખ્યા}}{\text{સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા}}$	$\frac{\text{કાંટાની કુલ સંખ્યા}}{\text{સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા}}$
1	9	16	$\frac{9}{25} = 0.36$	$\frac{16}{25} = 0.64$
2	12	13	$\frac{12+9}{25+25} = \frac{21}{50} = 0.42$	$\frac{13+16}{25+25} = \frac{29}{50} = 0.58$
3	17	8	$\frac{9+12+17}{25+25+25} = \frac{38}{75} = 0.51$	$\frac{16+13+8}{25+25+25} = \frac{37}{75} = 0.49$
4	15	10	$\frac{9+12+17+15}{25+25+25+25} = \frac{53}{100} = 0.53$	$\frac{16+13+8+10}{25+25+25+25} = \frac{47}{100} = 0.47$
.	.	.	...	...
.	.	.	...	...
.	.	.	...	...

પહેલા જૂથ-1 તેમનાં અવલોકનો લખશે અને ગુણોત્તરની કિંમત શોધી કાઢશે. પછી જૂથ-2 તેમનાં અવલોકનો લખશે, તે પણ સંચયી માહિતીનો ગુણોત્તર શોધશે. (એટલે કે જૂથ-1 અને જૂથ-2નો એકઠો ગુણોત્તર શોધશે.) આ જ રીતે બીજા જૂથમાં પણ પુનરાવર્તન થશે. આ ગુણોત્તરને સંચયી ગુણોત્તર કહીશું.

આપણે નોંધીએ કે પ્રથમ ચાર હાર એ આ જૂથે આપેલ અવલોકનોના આધારે છે.

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ? આપણે શોધી કાઢ્યું કે જેમ જેમ સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા વધે છે તેમ તેમ સ્તંભ (iv) અને (v)નો ગુણોત્તર 0.5ની નજીક અને નજીક આવે છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : એક સમતોલ પાસો 15 વખત ફેંકો (સમતોલ પાસો એટલે કે તમામ પરિણામની શક્યતાઓ સમાન હોય) અને અંક 1, 2, 3, 4, 5, 6 કેટલી વખત ઉપર દેખાય છે તે નોંધો. આ અવલોકનો કોષ્ટક 17.3માં દર્શાવો.

કોષ્ટક 17.3

પાસો ફેંકવાની સંખ્યા	પાસા પર મળતા પૂર્ણાંકની સંખ્યા					
	1	2	3	4	5	6
15						

પછી ગુણોત્તર,

$$\frac{\text{પાસા પર પૂર્ણાંક 1 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\frac{\text{પાસા પર પૂર્ણાંક 2 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{પાસા પર પૂર્ણાંક 6 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$ ની કિંમત શોધો.

હવે સમતોલ પાસો 30 વખત ફેંકો અને અવલોકન નોંધો તથા ઉપર પ્રમાણે ગુણોત્તર શોધો.

ઉપરની પ્રવૃત્તિમાં જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધશે, ત્યારે આપણે દરેક ગુણોત્તરની કિંમત શોધીશું તો તે $\frac{1}{6}$ની નજીક અને નજીક આવતી જશે.

આ ચકાસવા માટે આપણે વર્ગમાં એક જૂથ પ્રવૃત્તિ, પ્રવૃત્તિ-2 જેવી કરીશું. વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને ચાર કે પાંચ જૂથમાં વહેંચો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 10 વખત પાસો ઉછાળશે. અવલોકનો નોંધાશે અને સંચયી ગુણોત્તરની ગણતરી થશે.

આપણે પૂર્ણાંક 3 માટે ગુણોત્તર કિંમત કોષ્ટક 17.4માં નોંધીશું.

કોષ્ટક 17.4

જૂથ	જૂથમાં કુલ ફેંકાયેલ પાસાની સંખ્યા (ii)	$\dfrac{\text{પાસા પર 3 આવે તે સંચયી સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાની કુલ સંખ્યા}}$ (iii)
1	---	---
2	---	---
3	---	---
4	---	---
5	---	---

ઉપરનું કોષ્ટક બીજા પૂર્ણાંકો માટે પણ વિસ્તારી શકાય.

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ?

જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધુ ને વધુ તેમ સ્તંભ (iii)માંનો ગુણોત્તર $\frac{1}{6}$ની નજીક અને નજીક જશે.

પ્રવૃત્તિ 4 : બે સિક્કાઓ એકસાથે વીસ વખત ઉછાળો અને નીચે આપેલ કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં અવલોકનોની નોંધ કરો.

કોષ્ટક 17.5

બે સિક્કાઓ ઉછાળવાની સંખ્યા	સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર બે વખત કાંટો આવે તેની સંખ્યા
20	---	---	---

હવે નીચેના ગુણોત્તરની કિંમતની ગણતરી કરીએ :

$$A = \frac{\text{સિક્કા પર એક વખત છાપ આવે તે સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$B = \frac{\text{સિક્કા પર બંને છાપ આવે તે સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$C = \frac{\text{સિક્કા પર બંને કાંટા આવે તે સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

[**નોંધ :** 'બે કાંટા સિક્કા પર આવે છે' તેનો અર્થ એ છે કે 'બેમાંથી એક પણ સિક્કા પર છાપ ન આવે.']

પ્રવૃત્તિ 1માં સિક્કાને ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને પ્રયત્ન કહે છે. પ્રવૃત્તિ 3માં પાસાને ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને પ્રયત્ન કહે છે અને પ્રવૃત્તિ 4માં બે સિક્કાને ઉછાળવા તે પણ પ્રયત્ન છે. માટે **પ્રયત્ન એ એક ક્રિયા છે જેમાં એક કે તેથી વધુ પરિણામ મળી શકે.** પ્રયોગ માટેની **ઘટના (Event)** એ પ્રયોગનાં કેટલાંક પરિણામોનું એકત્રીકરણ છે.

ઉપરની પ્રવૃત્તિઓ પરથી આપણે જોઈએ કે સંભાવના શું છે. અહીં આપણે પ્રયત્નોનાં પરિણામો સીધાં જોઈ શકીએ છીએ. આપણે પ્રાયોગિક સંભાવના અથવા પ્રાપ્ત થાય તેવી સંભાવના શોધીશું.

ધારો કે કુલ પ્રયત્નો n છે. ઘટના E ઉદ્ભવે તેની સંભાવના P(E) વડે દર્શાવાય છે તે આ મુજબ છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના ઉદ્ભવે તે ઘટના માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

આપણી સરળતા ખાતર **પ્રાપ્ત થાય તેવી સંભાવના**ને બદલે ફક્ત **સંભાવના** જ લખીશું.

ઉદાહરણ 1 : એક સિક્કાને 100 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તેમાં 56 વખત છાપ મળે છે અને 44 વખત કાંટો મળે છે. દરેક ઘટના માટે સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : અહીં સિક્કો 100 વખત ઉછાળવામાં આવે છે, માટે કુલ પ્રયત્નો 100 થાય. સિક્કા પર છાપ મળે અને સિક્કા પર કાંટો મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E અને F કહીશું. ઘટના E ઉદ્ભવવાની સંખ્યા એટલે કે સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા 56 છે.

માટે, Eની સંભાવના $= \frac{\text{સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$

$$P(E) = \frac{56}{100} = 0.56$$

તે જ રીતે, સિક્કા પર કાંટો આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{\text{સિક્કા પર કાંટો આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$

$$P(F) = \frac{44}{100} = 0.44$$

નોંધીએ કે ઉપરના દાખલામાં $P(E) + P(F) = 0.56 + 0.44 = 1$. ઘટના Eની સંભાવનાને સંકેતમાં P(E) દર્શાવાય છે. અહીં દરેક પ્રયત્નનાં E અને F જ શક્ય પરિણામો છે.

ઉદાહરણ 2 : ક્રિકેટમાં સચિને 60 ઇનિંગ્સમાં 12 વખત સદી ફટકારી છે, તો તેણે સદી નથી ફટકારી તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : સચિને 12 વખત સદી ફટકારી તે ઘટનાને A કહીશું.

$\therefore$ સચિને 60 ઇનિંગ્સમાં સદી નથી ફટકારી તેવી ઇનિંગ્સની સંખ્યા $= 60 - 12 = 48$

સચિને સદી નથી ફટકારી તે ઘટનાને ધારો કે B કહીએ. સચિને સદી નથી ફટકારી તે ઘટનાની સંભાવના P(B) લઈએ.

$$\therefore P(B) = \frac{\text{સચિને સદી નથી ફટકારી તે ઇનિંગ્સની સંખ્યા}}{\text{કુલ રમાયેલ ઇનિંગ્સ}}$$

$$P(B) = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} = 0.80$$

ઉદાહરણ 3 : બે સિક્કાઓ 1000 વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને આપણને 225 વખત બે છાપ મળે છે. 500 વખત એક છાપ મળે છે અને 275 વખત એક પણ છાપ મળતી નથી. આ દરેક ઘટનાઓની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે વખત છાપ મળે, એક વખત છાપ મળે અને એક પણ વખત છાપ ન મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે A, B અને C દર્શાવીએ.

$$P(A) = \frac{225}{1000} = 0.225$$

$$P(B) = \frac{500}{1000} = 0.500$$

$$P(C) = \frac{275}{1000} = 0.275$$

અહીં પણ આપણે નોંધીએ કે $P(A) + P(B) + P(C) = 0.225 + 0.500 + 0.275 = 1$
અને પ્રયત્નનાં પરિણામો A અથવા B અથવા C છે.

જ્યારે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે અને છાપ ઉપર આવે તો આપણે ઘટના H ઉદ્ભવી છે તેમ કહીશું. તે જ રીતે જ્યારે સિક્કો ઉછાળવામાં આવે અને કાંટો ઉપર આવે, તો તેને ઘટના T ઉદ્ભવે છે તેમ કહીશું. જો એક સિક્કાને બે વખત અથવા બે સિક્કાને એક સાથે એક વખત ઉછાળવામાં આવે અને બંને છાપ ઉપર આવે તો તે ઘટનાને HH ઉદ્ભવી છે તેમ કહેવાય. હવે એક સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે અને અનુક્રમે છાપ, છાપ અને કાંટો ઉપર આવે તો તે ઘટનાને HHT ઉદ્ભવે છે તેમ કહેવાય. આવી રીતે HHH, HTH, TTH ઘટના ઉદ્ભવી શકે, વગેરે.

ઉદાહરણ 4 : એક સમતોલ સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) ત્રણે વખત છાપ (H) ઉદ્ભવે

(ii) છાપ (H) બે વખત અને કાંટો (T) એક વખત ઉદ્ભવે

(iii) એક વખત H અને બે વખત T ઉદ્ભવે

(iv) ત્રણે વખત T ઉદ્ભવે

(v) ચાર વખત T ઉદ્ભવે

(vi) વધુમાં વધુ ત્રણ વખત T ઉદ્ભવે

ઉકેલ : જ્યારે સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે ત્યારે H અને T મળે. શક્ય પરિણામો HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT છે. આમ કુલ 8 પરિણામો મળે છે.

(i) ધારો કે ત્રણે વખત H ઉદ્ભવે તે ઘટનાને A કહીએ, તો ઘટના Aની સંભાવના

$$P(A) = \frac{\text{ત્રણે H સમાવતાં પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{કુલ પરિણામો}} = \frac{1}{8}$$

(ii) ધારો કે H બે વખત આવે અને T એક વખત આવે તે ઘટના B છે. આ ઘટના ત્રણ રીતે ઉદ્ભવે : HHT, HTH અને THH. માટે ઘટના Bની સંભાવના

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

(iii) ધારો કે H એક વખત આવે અને T બે વખત આવે તે ઘટના C હોય. આ ઘટના પણ ત્રણ રીતે ઉદ્ભવે : HTT, THT, TTH.

$\therefore$ $P(C) = \frac{3}{8}$

(iv) ધારો કે T ત્રણે વખત આવે તે ઘટના D હોય. આ ઘટના ફક્ત એક રીતે ઉદ્ભવે

TTT. માટે ઘટના Dની સંભાવના

$\therefore$ $P(D) = \frac{1}{8}$

અહીં નોંધો કે બધી જ ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો

$\therefore$ $P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

(v) ધારો કે ચાર વખત T આવે તેવી ઘટના E હોય, તો આ ઘટના ઉદ્ભવે તેવી સંભાવના 0 છે.

$\therefore$ $P(E) = 0$

(vi) વધુમાં વધુ ત્રણ વખત H આવે તે ઘટના F હોય, તો તે ચોક્કસ ઘટના ઉદ્ભવે તેવાં પરિણામો 8 છે.

$\therefore$ $P(F) = \frac{8}{8} = 1$

ઉદાહરણ 5 : એક પાસો 100 વખત ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 આવૃત્તિ-કોષ્ટક 17.6માં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 17.6

પરિણામ	1	2	3	4	5	6
આવૃત્તિ	18	14	11	17	18	22

દરેક પરિણામ આવવાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે E_i એ પરિણામ i, આવવાની ઘટના છે. જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

પરિણામ i મેળવવાની સંભાવના $= P(E_i) = \frac{i \text{ ની આવૃત્તિ}}{\text{પાસો ફેંકવાની કુલ સંખ્યા}}$

$\therefore$ $P(E_1) = \frac{18}{100} = 0.18$

આ જ રીતે, $P(E_2) = \frac{14}{100} = 0.14$

$$P(E_3) = \frac{11}{100} = 0.11$$

$$P(E_4) = \frac{17}{100} = 0.17$$

$$P(E_5) = \frac{18}{100} = 0.18$$

$$P(E_6) = \frac{22}{100} = 0.22$$

નોંધીએ કે, $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6)$

$$= 0.18 + 0.14 + 0.11 + 0.17 + 0.18 + 0.22 = 1$$

નોંધ : ઉપરના દાખલાઓ પરથી નોંધ કરીએ કે,

(i) પ્રત્યેક ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1ની વચ્ચે આવેલી હોય છે.

(ii) જો દરેક ઘટના શક્ય હોય અને તેમને સામાન્ય પરિણામ ન હોય, તો બધી ઘટનાની સંભાવનાનો સરવાળો 1 થાય છે.

(iii) ઉદાહરણ 5 માટે E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 અને E_6 એ પ્રયત્નના શક્ય તેટલાં પરિણામો છે.

(iv) અશક્ય ઘટનાની સંભાવના શૂન્ય છે અને ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના એક છે.

આપેલી વસ્તુઓમાંથી કોઈ વસ્તુની યાદચ્છિક પસંદગી એટલે કોઈ પૂર્વગ્રહરહિત અને પૂર્વશરત વિના કરેલી પસંદગી.

ઉદાહરણ 6 : ટેલિફોન ડિરેક્ટરીના એક પાના પર 200 ટેલિફોન નંબર હતા. તે નંબરમાં એકમના સ્થાનના અંકના આવૃત્તિ-વિતરણ (દાખલા તરીકે ટેલિફોન નંબર 230627નો એકમ અંક 7 છે.) માટેનું કોષ્ટક 17.7 આપેલ છે.

કોષ્ટક 17.7

એકમનો અંક	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
આવૃત્તિ	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

પાના પર જોયા સિવાય, કોઈ એક નંબર પસંદ કરવામાં આવે છે. એકમના સ્થાન પરનો અંક 5, 7 અને 9 હોય, તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ :

(i) એકમના સ્થાને અંક 5 હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$$= \frac{\text{5 આવવાની આવૃત્તિ}}{\text{ટેલિફોન નંબરની કુલ સંખ્યા}} = \frac{10}{200} = 0.05$$

(ii) એકમના સ્થાને અંક 7 હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$$= \frac{\text{7 આવવાની આવૃત્તિ}}{\text{ટેલિફોન નંબરની કુલ સંખ્યા}} = \frac{28}{200} = 0.14$$

(iii) એકમના સ્થાને અંક 9 હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$$= \frac{\text{9 આવવાની આવૃત્તિ}}{\text{ટેલિફોન નંબરની કુલ સંખ્યા}} = \frac{20}{200} = 0.1$$

ઉદાહરણ 7 : બે બાળકો ધરાવતાં 1500 કુટુંબો યાદચ્છિક (Random) રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યા અને નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ :

કુટુંબમાં છોકરીઓની સંખ્યા	2	1	0
કુટુંબની સંખ્યા	475	814	211

યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કુટુંબમાં (1) બે છોકરીઓ હોય (2) એક છોકરી હોય (3) એક પણ છોકરી ન હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો :

ઉકેલ : અહીં કુટુંબોની કુલ સંખ્યા 1500 છે.

(i) પસંદ કરેલ કુટુંબમાં બે છોકરીઓ હોય તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{475}{1500} = 0.3167$

(ii) પસંદ કરેલ કુટુંબમાં એક છોકરી હોય તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{814}{1500} = 0.5427$

(iii) પસંદ કરેલ કુટુંબમાં એક પણ છોકરી ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{211}{1500} = 0.1406$

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક સંસ્થાએ યાદચ્છિક રીતે 2400 કુટુંબોને પસંદ કર્યાં અને તેમની આવક તેમજ તેમની પાસેનાં વાહનોની સંખ્યા વચ્ચેનો સંબંધ શોધવા માટેનું સર્વેક્ષણ કર્યું. તેમાંથી પ્રાપ્ત માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં ભેગી કરેલ છે :

માસિક આવક (₹ માં)	કુટુંબદીઠ વાહન			
	0	1	2	2થી વધુ વાહન
10000થી ઓછી	10	160	25	0
10000 – 13000	0	305	27	2
13000 – 16000	1	535	29	1
16000 – 19000	2	469	59	25
19000થી વધુ	1	579	82	88

ધારો કે કોઈ એક કુટુંબ પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ કુટુંબ માટે નીચે આપેલી માહિતી પરથી સંભાવના શોધો :

(1) માસિક આવક ₹ 13000 – 16000 હોય અને તેમને ફક્ત બે વાહન હોય.

(2) માસિક આવક ₹ 19000 અથવા તેથી વધુ હોય અને ફક્ત એક જ વાહન હોય.

(3) માસિક આવક ₹ 10000થી ઓછી હોય અને તેમની પાસે એક પણ વાહન ન હોય.

(4) માસિક આવક ₹ 19000થી વધુ હોય અને બેથી વધુ વાહન હોય.

(5) એક કરતાં વધુ વાહન ન હોય.

ઉકેલ : અહીં કુલ 2400 કુટુંબ છે.

(1) પસંદ કરેલ કટુંબની માસિક આવક ₹ 13000–16000 હોય અને ફક્ત બે વાહન હોય તે ઘટનાની સંભાવના = $\frac{29}{2400}$ = 0.0121

(2) પસંદ કરેલ કુટુંબની આવક ₹ 19000 અથવા તેથી વધુ હોય અને ફક્ત એક વાહન હોય તે ઘટનાની સંભાવના = $\frac{579}{2400}$ = 0.2413

(3) પસંદ કરેલ કુટુંબની માસિક આવક ₹ 10000થી ઓછી હોય અને એક પણ વાહન ન હોય તે ઘટનાની સંભાવના = $\frac{10}{2400}$ = 0.0004

(4) પસંદ કરેલ કુટુંબની માસિક આવક ₹ 19000 થી વધુ હોય અને બેથી વધુ વાહન હોય તે ઘટનાની સંભાવના = $\frac{88}{2400}$ = 0.3667

(5) પસંદ કરેલ કુટુંબ પાસે એક કરતાં વધુ વાહન ન હોય તેની સંભાવના

$$= \frac{\text{એક પણ વાહન ન હોય તેવા કુટુંબની સંખ્યા + એક વાહન હોય તે કુટુંબની સંખ્યા}}{\text{કુટુંબની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{10 + 0 + 1 + 2 + 1 + 160 + 305 + 535 + 469 + 579}{2400}$$

$$= \frac{2062}{2400} = 0.8592$$

ઉદાહરણ 9 : 100 ગુણની કસોટીમાં બે શ્રેણીના વિદ્યાર્થીઓના ગણિતનાં કાર્ય માટેનું વિશ્લેષણ કરવા શિક્ષકે વિચાર્યું. તેમનું કાર્ય જોતાં તેમણે જોયું કે અમુક વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 20થી ઓછા અને અમુક વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 70 કે તેથી વધુ છે. તેમણે વિચાર્યું કે વિદ્યાર્થીઓને જુદાં જુદાં જૂથમાં નીચે પ્રમાણે વહેંચવા છે :

ગુણ	0–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70થી વધુ	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	7	10	10	20	20	15	8	90

(i) ગણિતની કસોટીમાં 20 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંભાવના શોધો.

(ii) 60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા 90 છે.

(i) ધારો કે '20 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓ'ની ઘટના A છે.

$$\therefore P(A) = \frac{\text{20થી ઓછા ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા}}{\text{વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા}} = \frac{7}{90} = 0.0778$$

(ii) ધારો કે '60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓ'ની ઘટના B છે.

અહીં 60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા = 15 + 8 = 23

$$\therefore P(B) = \frac{\text{60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા}}{\text{વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા}} = \frac{23}{90} = 0.2556$$

ઉદાહરણ 10 : ધોરણ IXના 30 વિદ્યાર્થીઓના બ્લડ ગ્રૂપ નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલ છે :

બ્લડ ગ્રૂપ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
A+	9
B–	6
O+	12
AB+	3
કુલ	30

યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીઓનું બ્લડ ગ્રૂપ :

(i) AB+ હોય (ii) O+ હોય (iii) O+ કે AB+ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં વર્ગના કુલ 30 વિદ્યાર્થીઓ છે.

(i) પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીનું બ્લડ ગ્રૂપ AB+ હોય તે ઘટનાને A કહીએ, તો ઘટના Aની સંભાવના

$P(A) = \frac{3}{30} = 0.10.$

(ii) પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીનું બ્લડ ગ્રૂપ O+ હોય તે ઘટનાને B કહીએ, તો ઘટના Bની સંભાવના

$P(B) = \frac{12}{30} = 0.400.$

(iii) પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીનું બ્લડ ગ્રૂપ O+ કે AB+ ન હોય તે ઘટનાને C કહીએ.

ઘટના Cમાં O+ કે AB+ બ્લડ ગ્રૂપ ન હોય તેવા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $9 + 6 = 15$

$\therefore P(C) = \frac{15}{30} = 0.50.$

યાદ રાખીએ કે વિદ્યાર્થીઓનું બ્લડ ગ્રૂપ O+ કે AB+ નથી તેનો અર્થ એ છે કે વિદ્યાર્થીઓનું બ્લડ ગ્રૂપ A+ કે B– છે.

સ્વાધ્યાય 17

1. હવામાન ખાતાની કચેરી બતાવે છે કે છેલ્લા 250 સળંગ દિવસના તેમના હવામાનની આગાહીમાં 175 દિવસ સાચું પડ્યું છે.

(i) તો આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) આપેલા કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી ન પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

2. ટાયર બનાવતી એક કંપનીએ પોતાનું ટાયર બદલવાનું થાય તે પહેલાં કેટલું અંતર કાપે છે તેની નોંધ કરી છે. નીચેનું કોષ્ટક 1000 ટાયર વિશે પરિણામ દર્શાવે છે :

અંતર (કિમીમાં)	4000 કરતાં ઓછું	4000 થી 9000	9001 થી 14000	14000 થી વધુ
આવૃત્તિ	20	210	325	445

જો તમે આ કંપનીનું ટાયર ખરીદો તો ટાયર,

(i) 4000 કિમી અંતર કાપતા પહેલાં ટાયર બદલવાની જરૂર પડી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) 9000 કિમી અંતર કાપ્યા પછી ટાયર બદલવું પડે તેની સંભાવના શોધો.

(iii) 4000 અને 14000 કિમી અંતર કાપ્યાની વચ્ચે ટાયર બદલવાની જરૂર પડી હોય તેની સંભાવના શોધો.

3. માસિક એકમ કસોટીમાં વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ ટકામાં નીચે મુજબ છે :

એકમ કસોટી	I	II	III	IV	V
મેળવેલ ગુણ ટકામાં	68	72	75	70	65

વિદ્યાર્થીએ 70 ટકાથી વધુ અને 60 ટકાથી 70 ટકાની વચ્ચે ગુણ એકમ કસોટીમાં મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

4. કોઈ એક શહેરમાં કોઈ વીમાકંપનીએ યાદચ્છિક રીતે 1000 ડ્રાઇવરની પસંદગી કરી તેમની ઉંમર અને તેમણે કરેલ અકસ્માત વચ્ચેનો સંબંધ શોધ્યો. તે માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

ડ્રાઇવરની ઉંમર (વર્ષમાં)	એક વર્ષમાં કરેલ અકસ્માત				
	0	1	2	3	3થી વધુ
18 – 29	220	80	55	30	17
30 – 50	252	63	30	11	9
50થી ઉપર	180	23	17	8	5

શહેરમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કોઈ એક ડ્રાઇવર માટે નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) ઉંમર 18 – 29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર ત્રણ અકસ્માત કર્યા હોય.

(ii) ઉંમર 30 – 50 વર્ષની હોય અને એક વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય.

(iii) એક વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યો હોય.

5. કોઈ એક શ્રેણીના 40 વિદ્યાર્થીઓનું વજન નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
31 – 35	9
36 – 40	5
41 – 45	14
46 – 50	3
51 – 55	3
56 – 60	2
61 – 65	2
66 – 70	1
71 – 75	1
	કુલ 40

(i) વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46–50 કિગ્રામાં હોય તેની સંભાવના શોધો.
(ii) વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા હોય તેની સંભાવના કેટલી ?
(iii) વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા કરતાં વધુ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

6. બિયારણની 5 થેલીમાંથી દરેકમાંથી 50 બીજ પસંદ કરવામાં આવ્યા અને તેને અંકુરણ માટે ઉચિત પરિસ્થિતિમાં મૂકવામાં આવ્યા. 20 દિવસ પછી, દરેકમાંથી અંકુરિત થયેલ બીજની ગણતરી કરવામાં આવી અને તે નીચે પ્રમાણે છે :

થેલી	1	2	3	4	5
અંકુરિત થયેલ બીજની સંખ્યા	40	48	40	35	45

નીચેનામાંથી બીજની અંકુરિત થવાની સંભાવના શોધો :
(i) થેલીમાંના 40થી વધુ બીજ અંકુરિત થયા હોય.
(ii) થેલીમાંના 49 બીજ અંકુરિત થયા હોય.
(iii) થેલીમાંથી 35થી વધુ બીજ અંકુરિત થયા હોય.

7. ઘઉંના લોટની થેલી પર 5 કિગ્રા વજન લખેલ 12 થેલી પસંદ કરી. તેમાં ખરેખર કેટલો લોટ છે તે વજન નીચે પ્રમાણે છે (કિગ્રામાં) :

5.0, 4.97, 5.05, 5.03, 5.08, 5.0, 4.98, 4.99, 5.04, 5.07, 5.06, 4.96

આમાંની કોઈ એક થેલી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરી તેમાં (1) લોટનું વજન 5 કિગ્રા કરતાં વધુ હોય અને (2) લોટનું વજન બરાબર 5 કિગ્રા હોય તેની સંભાવના શોધો.

8. બે સમતોલ પાસાને 50 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા ઉપરના અંકોનો સરવાળો નીચે મુજબ છે :

સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
આવૃત્તિ	3	9	8	8	4	5	1	3	7	2	0

નીચેનાની સંભાવના શોધો :
(i) સરવાળો 9 કરતાં વધુ હોય. (ii) સરવાળો બરાબર 7 હોય.
(iii) સરવાળો 6 કરતાં ઓછો હોય.

9. 40 વિદ્યાર્થીઓનું તેમના રહેઠાણથી તેમની શાળાનું અંતર નીચે મુજબ છે :

અંતર (કિમીમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 – 5	5
5 – 10	11
10 – 15	11
15 – 20	9
20 – 25	1
25 – 30	1
30 – 35	2
	કુલ 40

વિદ્યાર્થીઓના રહેઠાણથી તેની શાળા વચ્ચેનું અંતર નીચે આપ્યા મુજબનું હોય, તો સંભાવના શોધો :

(i) 20 કિમીથી વધુ હોય.

(ii) 15 કિમી અથવા તેનાથી ઓછું હોય.

(iii) 10થી 15 કિમીની વચ્ચે હોય.

(iv) 10થી 20 કિમીની વચ્ચે હોય.

10. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવામાં આવે છે, તો પસંદ કરેલ પત્તું

(i) લાલનો એક્કો હોય. (ii) ફુલ્લીનું હોય.

(iii) ચિત્રવાળું હોય. (iv) રાજા અથવા રાણી હોય તેની સંભાવના શોધો.

11. પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા પરનો અંક યુગ્મ હોય તેની સંભાવના શોધો.

12. પાસો એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. પાસા પરનો અંક અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

13. 500 કુટુંબોમાં છોકરીઓની સંખ્યાનું સર્વેક્ષણ નીચે મુજબ છે :

છોકરીઓની સંખ્યા	0	1	2
કુટુંબોની સંખ્યા	75	275	150

યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા કુટુંબોમાં પરિસ્થિતિ મુજબ સંભાવના શોધો :

(i) એક છોકરી હોય. (ii) બે છોકરીઓ હોય.

(iii) ઓછામાં ઓછી એક છોકરી હોય.

14. 1000 વિદ્યાર્થીઓના બુદ્ધિ-આંક (I.Q.) માટે એક સર્વેક્ષણ કરવામાં આવ્યું તે નીચે મુજબ છે :

બુદ્ધિ-આંક	30થી નીચે	30 – 50	50 – 60	60 – 70	70થી વધુ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	120	230	300	190	160

નીચેનાની સંભાવના શોધો :

(i) બુદ્ધિ-આંક 50-60 વચ્ચે હોય. (ii) બુદ્ધિ-આંક 70થી વધુ હોય.

(iii) બુદ્ધિ-આંક 50 અથવા 50થી નીચે હોય. (iv) બુદ્ધિ-આંક 60-70 વચ્ચે હોય.

(v) બુદ્ધિ-આંક 50થી વધુ હોય.

15. કોઈ એક શ્રેણીના 50 વિદ્યાર્થીઓના ગણિતમાં 50માંથી મેળવેલ ગુણ નીચે પ્રમાણે છે :

ગુણ	20થી નીચા	20 – 30	30 – 40	40 – 50
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	6	11	20	13

નીચેનાની સંભાવના શોધો :

(i) 20 અને 40 વચ્ચેના ગુણ હોય. (ii) 40થી વધુ ગુણ હોય.

(iii) 30 કે 30થી ઓછા ગુણ હોય. (iv) 30 અને 40 વચ્ચે હોય.

(v) 20થી વધુ ગુણ હોય.

16. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અને (d)માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) સમતોલ પાસા પર અંક 5 આવે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$

(2) બે સમતોલ સિક્કાઓને ઉછાળતાં બંને પર છાપ આવે તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{5}$

(3) કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના ......ની વચ્ચે હોય.
(અશક્ય અને ચોક્કસ ઘટના સિવાય) ☐

(a) 1 અને 2 (b) 0 અને 1 (c) 0 અને 2 (d) – 1 અને 1

(4) 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું પસંદ કરતાં તે ગુલામ હોય તેની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{52}$ (b) $\frac{2}{52}$ (c) $\frac{1}{13}$ (d) $\frac{1}{17}$

(5) 50 ગુણમાંથી 51 ગુણ મેળવવાની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

(6) ‘સૂર્ય પૂર્વમાં ઊગે છે.’ તે ઘટનાની સંભાવના ...... છે. ☐

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દા શીખ્યા :

1. પ્રયોગનાં જરૂરી પરિણામોના ગણને તે પ્રયોગની ઘટના કહે છે.

2. ઘટનાથી પ્રાપ્ત થાય તેવી (પ્રાયોગિક) સંભાવના P(E) આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$P(E) = \frac{\text{E ઉદ્ભવવા માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

3. કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1ની વચ્ચે જ હોય છે. (0 અને 1 સહિત)