પ્રકરણ 11

વિકલન

Mathematics is as much an aspect of culture as it is a collection of algorithms.

– Carl Boyer (in a Calculus Textbook)

11.1 પ્રાસ્તાવિક

કલનશાસ્ત્રમાં, કોઈ વિધેયનું તેના ચલ ને સાપેક્ષ થતાં ફેરફારનું માપ વિકલિત કહેવાય છે. સ્થૂળ ભાષામાં વિકલન એટલે કોઈ રાશિમાં અન્ય કોઈ રાશિ ને સાપેક્ષ થતો ફેરફાર એમ કહી શકાય. કોઈ પદાર્થનો, સમયને સાપેક્ષ સ્થિતિમાં થતો ફેરફાર **તાત્ક્ષણિક વેગ (Instantaneous Velocity)** કહેવાય છે.

કોઈ વિધેયનું વિકલન તેના ચલની આપેલ કિંમત આગળનું 'સૌથી સારું' સુરેખ આસન્ન મૂલ્ય હોય છે. વાસ્તવિક ચલના વાસ્તવિક વિધેય માટે કોઈ બિંદુ આગળ વિધેયનું વિકલિત, તે વિધેયના આલેખના તે બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

કોઈ 'નાની' સંખ્યા h માટે બિંદુઓ $(a, f(a))$ અને $(a + h, f(a + h))$ માંથી પસાર થતી રેખાને વક્ર $y = f(x)$ની **છેદક રેખા (Secant line)** કહે છે. h શૂન્યાભિલક્ષી હોય તો છેદિકાનો ઢાળ વક્ર $y = f(x)$ ના $(a, f(a))$ આગળના સ્પર્શકના ઢાળનું આસન્ન મૂલ્ય આપે છે, તથા h નું મૂલ્ય જેટલું નાનું હોય તેટલું ઢાળનું આસન્ન મૂલ્ય સ્પર્શકના ઢાળના મૂલ્યની વધારે નજીક મળે છે.

રેખાનો બિંદુ $(a, f(a))$ આગળ ઢાળ

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ થી મળે.}$$

આને **ન્યૂટનનો તફાવત ગુણોત્તર (Newton's Difference Quotient)** કહેવાય છે.

જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય તો તેને f નું a આગળ વિકલિત કહેવાય છે. અને તેને $f'(a)$ વડે દર્શાવાય છે. આ રાશિ વક્ર $y = f(x)$ના બિંદુ $(a, f(a))$ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ દર્શાવે છે.

હવે, $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

$$= f'(a) - f'(a)$$

$$= 0$$

આમ, $f(a + h) \cong f(a) + hf'(a)$ એટલે કે hના અત્યંત નાના મૂલ્ય માટે $f(a + h)$ એ $f(a) + hf'(a)$નું સુરેખ આસન્ન મૂલ્ય દર્શાવે છે.

જો $Q(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ લઈએ તો, $Q(h)$ બિંદુઓ $(a, f(a))$ તથા $(a + h, f(a + h))$ માંથી પસાર થતી રેખાનો ઢાળ આપે છે. જો fનો આલેખ **'સળંગ'** હોય અને વચ્ચે તૂટક ના હોય અને $\lim\limits_{h \to 0} Q(h)$ અસ્તિત્વ ધરાવે તો તેને fનું a આગળ વિકલિત કહેવાય છે, અને f એ $x = a$ આગળ વિકલનીય છે તેમ કહેવાય છે.

રોકેટશાસ્ત્રમાં વૈજ્ઞાનિકોને રોકેટની ઊંચાઈની માહિતી પરથી, ઉપગ્રહ છોડવાની ગતિની ગણતરી કરવાની હોય છે. કોઈ શેરના વર્તમાન ભાવ ઉપરથી તેમાં થનારા ફેરફારની આગાહી નાણાસંસ્થાઓ કરતી હોય છે. આ બધામાં કોઈ રાશિ (સાપેક્ષ ચલ)માં, અન્ય કોઈ રાશિ (નિરપેક્ષ ચલ)ને સાપેક્ષ થતા ફેરફારની માહિતી જરૂરી છે.

11.2 વ્યાખ્યા અને ઉદાહરણો

વ્યાખ્યા : ધારો કે f એ અંતરાલ (a, b) પર વ્યાખ્યાયિત વાસ્તવિક વિધેય છે. ધારો કે $c \in (a, b)$ અને h એટલો 'નાનો' છે કે $c + h \in (a, b)$.

જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય તો તેને f નું c આગળ વિકલિત કહે છે, અને તેને $f'(c)$ વડે દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ 1 : $f : R \to R, f(x) = 3x + 5$ છે. જો $f'(1)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3(1+h) + 5 - 8}{h}$ $\quad (f(1) = 8)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$\therefore$ $f'(1)$ અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને $f'(1) = 3$

ઉદાહરણ 2 : $f : R \to R, f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ માટે જો $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h - 1 - (-1)}{h}$ $\quad (f(0) = -1)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2h + 3) = 3$$

$\therefore$ $f'(0)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(0) = 3$

ઉદાહરણ 3 : $f : R \to R, f(x) = sinx$ માટે જો $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{sinh - 0}{h}$ $\quad (sin0 = 0)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sinh}{h} = 1$$

$\therefore$ $f'(0)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(0) = 1$

ઉદાહરણ 4 : $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ માટે $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}$ $\quad (f(0) = 0)$

$= \lim\limits_{h \to 0} \sin\frac{1}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી. (જુઓ પ્રકરણ 10)

$\therefore$ $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ને $x = 0$ આગળ વિકલિત નથી.

ઉદાહરણ 5 : $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ માટે $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$ $\quad (f(0) = 0)$

$= \lim\limits_{h \to 0} h\sin\frac{1}{h}$

હવે, $0 \le \left|\sin\frac{1}{h}\right| \le 1 \Rightarrow 0 \le \left|h\sin\frac{1}{h}\right| \le |h|$ અને $\lim\limits_{h \to 0} = 0$, $\lim\limits_{h \to 0} |h| = 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{h \to 0} \left|h\sin\frac{1}{h}\right| = 0$

$\therefore$ $\lim\limits_{h \to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$

$\therefore$ $f'(0)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(0) = 0$

વ્યાખ્યા : ધારો કે f એ (a, b) ઉપર વ્યાખ્યાયિત છે. ધારો કે $x \in (a, b)$ અને h એટલો 'નાનો' છે કે જેથી $x + h \in (a, b)$. જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય તો f એ x આગળ વિકલનીય છે તેમ કહીશું અને આ લક્ષને f નું x આગળનું વિકલિત કહીશું. આની મદદથી આપણે પ્રત્યેક વિધેય $f(x)$ને સંગત એક વિધેય $\frac{d}{dx} f(x)$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ. (a, b) નાં જે બિંદુઓ આગળ f વિકલનીય હોય તે બિંદુઓ માટે

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ એમ લખીશું.}$$

(અહીં f એ (a, b)ના ઓછામાં ઓછા એક બિંદુ આગળ વિકલનીય છે તેમ ધારી લીધું છે.)

જો $y = f(x)$ લખીએ તો $\frac{d}{dx} f(x)$ને $\frac{dy}{dx}$ લખી શકાય. તેનું $x = c$ આગળનું મૂલ્ય $\left[\frac{d}{dx} f(x)\right]_{x=c}$ અથવા $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=c}$ અથવા ક્યારેક $[Df(x)]_{x=c}$ અથવા $f'(c)$ એમ વિવિધ રીતે લખી શકાય.

ઉદાહરણ 6 : $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ માટે $f'(x)$ અને $f'(0)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{[a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - (ax^2 + bx + c)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{[a(x^2 + 2hx + h^2) + bx + bh + c] - (ax^2 + bx + c)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2ahx + ah^2 + bh}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b)$$

$$= 2ax + b$$

$\therefore$ $\forall x \in R$, $f'(x)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(x) = 2ax + b$

$\therefore$ $f'(0) = b$ **($f'(x)$ માં $x = 0$ લેતાં)**

નોંધ : જો $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ ની મદદથી $f'(0)$ મેળવીએ તો પણ $f'(0) = b$ મળે.

ઉદાહરણ 7 : $f : R \to R$, $f(x) = ax + b$ માટે $f'(x)$ શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

$\therefore$ $f'(x)$નું અસ્તિત્વ છે, તેમજ $f'(x) = a$, $\forall x \in R$

ઉદાહરણ 8 : $f : R \to R$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ માટે $f'(x)$ અને $f'(0)$ મેળવો. અહીં, $x \neq \frac{-d}{c}$.

ઉકેલ : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{a(x+h)+b}{c(x+h)+d} - \frac{ax+b}{cx+d}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ax + ah + b)(cx + d) - (ax + b)(cx + ch + d)}{(cx + ch + d)(cx + d)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(acx + ad - acx - bc)}{(cx + ch + d)(cx + d)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(ad - bc)}{(cx + ch + d)(cx + d)}$$

$$= \frac{(ad - bc)}{(cx + d)^2} \qquad \text{(i)}$$

$\therefore$ $f'(x)$નું અસ્તિત્વ છે અને $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

$\therefore$ $f'(0) = \frac{ad - bc}{d^2}$

નોંધ : (i) માં $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ લેતાં $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$

11.3 વિકલિત પરની બૈજિક ક્રિયાઓ

ધારો કે f અને g બંને (a, b) ઉપર વિકલનીય છે.

તો, **(1) $f + g$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને**

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

(2) $f - g$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

(3) $f \times g$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}(f(x)\ g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

(4) $\frac{f}{g}$ પણ (a, b) ઉપર વિકલનીય છે અને

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

આને વિકલિત માટેના કાર્યનિયમો પણ કહે છે.

અગત્યનાં પરિણામો :

(1) $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$

આપણે જોયું કે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

ધારો કે $x + h = t$ તો જેમ $h \to 0$ તેમ $t \to x$

$\therefore \quad f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$

(2) **અચળ વિધેયનું વિકલિત શૂન્ય થાય છે.**

ધારો કે $f(x) = c.\ \forall x \in R.$

$\therefore \quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 0 = 0$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} c = 0$

(3) $\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$ ($k \in R$ અચળ છે.)

$\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}k$ ((2) પરથી)

$= k\frac{d}{dx}f(x) + f(x) \cdot 0$

$= k\frac{d}{dx}f(x)$

ઉદાહરણ 9 : $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ અને $\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$ ઉપરથી $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x) + (-1)g(x))$

$= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}(-1)g(x)$

$= \frac{d}{dx}f(x) + (-1)\frac{d}{dx}g(x)$

$= \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

ઉદાહરણ 10 : $k \in \mathrm{R}$ માટે $\frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx} f(x)$ સાબિત કરો.

ઉકેલ : $$\lim_{h \to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = \lim_{h \to 0} k \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ **(લક્ષનો નિયમ)**

$$= k\frac{d}{dx} f(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} kf(x) = k\frac{d}{dx} f(x)$$

કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો :

(1) $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathrm{N}, x \in \mathrm{R}$

સાબિતી : $$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + ... + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + ... + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

બીજી સાબિતી : આપણે આ સાબિતી ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી આપીશું.

ધારો કે, $\mathrm{P}(n) : \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$.

આપણે જોયું કે, $\frac{d}{dx} x^1 = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$. વળી $1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot 1 = 1$ **$(x \neq 0)$**

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}.$$

ધારો કે, $n = k + 1$

$$\frac{d}{dx} x^{k+1} = \frac{d}{dx} x^k \cdot x$$

$$= x^k \frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} x^k$$

$$= x^k \cdot 1 + x \cdot kx^{k-1}$$

$$= x^k + kx^k$$

$$= (k+1)x^k$$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ $\forall n \in \mathrm{N}$, P(n) સત્ય છે.

ત્રીજી સાબિતી : $\frac{d}{dx}x^n = \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x}$

$$= \lim_{t \to x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + ... + x^{n-1})}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x} (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + ... + x^{n-1})$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x + x^{n-3} \cdot x^2 + ... + x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

નોંધ : આપણે $n \in N$ અને $x \in R$ માટે સાબિત આપી, પરંતુ આ પરિણામ $n \in R$, $x \in R^+$ માટે પણ સત્ય છે. આની સાબિતી આપણે આપીશું નહિ.

(2) બહુપદીનું વિકલિત :

ધારો કે $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$, $n \in N$, $a_n \neq 0$, $a_i \in R$

($i = 0, 1, 2, ..., n$)

એ n-કક્ષાની બહુપદી છે.

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}P(x) = \frac{d}{dx}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0)$$

$$= \frac{d}{dx}a_n x^n + \frac{d}{dx}a_{n-1}x^{n-1} + \frac{d}{dx}a_{n-2}x^{n-2} + ... + \frac{d}{dx}a_0$$

(સરવાળાનું વિકલિત)

$$= a_n \frac{d}{dx}x^n + a_{n-1}\frac{d}{dx}x^{n-1} + a_{n-2}\frac{d}{dx}x^{n-2} + ... + \frac{d}{dx}a_0$$

$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + 0)$$

$$\left(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\right)$$

(3) સંમેય વિધેયનું વિકલિત :

ધારો કે, $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ સંમેય વિધેય છે. અહીં $p(x)$ અને $q(x)$ બહુપદી વિધેય છે. $q(x) \neq 0$

$\therefore \quad h'(x) = \frac{q(x)\,p'(x) - p(x)\,q'(x)}{[q(x)]^2}$, અહીં $p'(x)$ અને $q'(x)$ પરિણામ (2) પરથી મેળવી શકાય.

(4) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

(5) $\frac{d}{dx} cosx = -sinx$

$$\lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cosx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2sin\left(x + \frac{h}{2}\right) sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{sin\left(x + \frac{h}{2}\right) sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -sinx$$

$$\therefore \frac{d}{dx} cosx = -sinx$$

(6) $\frac{d}{dx} tanx = sec^2x$ $\quad x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

$$\frac{d}{dx} tanx = \frac{d}{dx} \frac{sinx}{cosx}$$

$$= \frac{cosx\frac{d}{dx}sinx - sinx\frac{d}{dx}cosx}{cos^2x} \qquad \left(\frac{d}{dx}\frac{f}{g}\text{ના નિયમ મુજબ}\right)$$

$$= \frac{cosx(cosx) - sinx(-sinx)}{cos^2x}$$

$$= \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$$

$$= \frac{1}{cos^2x}$$

$$= sec^2x$$

(7) $\frac{d}{dx} cotx = -cosec^2x$, $\quad x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$$\frac{d}{dx} cotx = \frac{d}{dx} \frac{cosx}{sinx}$$

$$= \frac{sinx\frac{d}{dx}cosx - cosx\frac{d}{dx}sinx}{sin^2x} \qquad \left(\frac{d}{dx}\frac{f}{g}\text{ના નિયમ મુજબ}\right)$$

$$= \frac{sinx\,(-sinx) - cosx \cdot cosx}{sin^2x}$$

$$= \frac{-(sin^2x + cos^2x)}{sin^2x}$$

$$= \frac{-1}{sin^2x}$$

$$= -cosec^2x$$

(8) $\frac{d}{dx} secx = secx\ tanx$, $\quad x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

$$\frac{d}{dx} secx = \frac{d}{dx} \frac{1}{cosx}$$

$$= \frac{cosx\frac{d}{dx}1 - 1\frac{d}{dx}cosx}{cos^2x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot 0 - 1(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec x \ \tan x$$

(9) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \ \cot x$, $\quad x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx} 1 - 1 \frac{d}{dx} \sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot 0 - 1(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec} x \ \cot x$$

નોંધ : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ને વ્યાખ્યા અથવા પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવેલું વિકલિત કહેવાય છે. ઉપરના પ્રમાણિત રૂપો (6) થી (9) પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવી શકાય છે.

$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x)) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x)$નું વ્યાપક રૂપ

$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + ... + \frac{d}{dx} f_n(x)$

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી મેળવી શકાય. આપણે આ પરિણામ બહુપદીના વિકલિતમાં ઉપયોગમાં લીધું છે.

અહીં નોંધીએ કે આ પરિણામ ફક્ત n-પદોના સાન્ત સરવાળા માટે જ સત્ય છે, અનંત સરવાળામાં આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય, એટલે કે $\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x) + ...) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + ...$ સત્ય ન પણ હોય. આની ચર્ચા માટે શ્રેઢીના **એકરૂપ અભિસાર (Uniform convergence)** અને અભિસાર વિષેની માહિતીની જરૂર પડે, જે આ તબક્કે આપણે કરી શકીએ નહિ.

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 11 : $f(x) = \cos^2 x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} \cos^2 x = \frac{d}{dx} \cos x \ \cos x$

$$= \cos x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \cos x$$

$$= 2\cos x \ (-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cos x$$

$$= -\sin 2x$$

ઉદાહરણ 12 : $x\sin x$ નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} x\sin x = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - x\sin x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\,sin(x+h) - (x+h)sin\,x + (x+h)sin\,x - xsin\,x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (x+h)\left(\frac{sin(x+h) - sin\,x}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\,2cos\left(x+\frac{h}{2}\right) sin\,\frac{h}{2}}{h} + \lim_{h \to 0} sinx$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\,cos\left(x+\frac{h}{2}\right) sin\,\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + sinx \qquad \left(\lim_{h \to 0} c = c\right)$$

$$= xcos\,x + sinx$$

ઉદાહરણ 13 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\frac{d}{dx}\,tanx$ મેળવો. $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\,tanx = \lim_{h \to 0} \frac{tan\,(x+h) - tanx}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{tan\,(x+h-x)}{h}\,(1 + tanx\;tan\,(x+h)) \qquad (tan(A-B) \text{ ના સૂત્ર મુજબ})$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{tanh}{h} \lim_{h \to 0} (1 + tanx\;tan\,(x+h))$$

$$= 1 \cdot (1 + tan^2 x)$$

$$= sec^2 x$$

ઉદાહરણ 14 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\frac{d}{dx}\,secx$ મેળવો. $x \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in Z\right\}$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\,secx = \lim_{h \to 0} \frac{sec\,(x+h) - secx}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{cos\,(x+h)} - \frac{1}{cos\,x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cosx - cos\,(x+h)}{hcosx\;cos\,(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2sin\left(\frac{-h}{2}\right) sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{hcosx\;cos(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \;\frac{sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{cosx\;cos(x+h)}$$

$$= \frac{1 \cdot sinx}{cosx\;cosx}$$

$$= secx\;\;tanx$$

ઉદાહરણ 15 : $\frac{d}{dx} sin2x$ શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} sin2x = \frac{d}{dx} 2sinx\ cosx$

$= 2\left[sinx \frac{d}{dx} cosx + cosx \frac{d}{dx} sinx\right]$

$= 2[sinx(-sinx) + cosx \cdot cosx]$

$= 2(cos^2x - sin^2x)$

$= 2cos\ 2x$

ઉદાહરણ 16 : $f(x) = \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{x^{n-2}}{n-2} + ... + x + 1$ નું વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + ... + x + 1\right) = \frac{nx^{n-1}}{n} + \frac{(n-1)x^{n-2}}{n-1} + \frac{(n-2)x^{n-3}}{n-2} + 1 + 0.$

$= x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + 1$

$= \frac{x^n - 1}{x - 1}$ **(સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો)**

ઉદાહરણ 17 : $\frac{d}{dx}(ax + b)^n$ મેળવો અને તે પરથી $\frac{d}{dx}(ax + b)^m (cx + d)^n$ તારવો.

ઉકેલ :

$\frac{d}{dx}(ax + b)^n = \frac{d}{dx}\left(a^nx^n + \binom{n}{1}(ax)^{n-1}b + \binom{n}{2}(ax)^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1} ax \cdot b^{n-1} + b^n\right)$

$= a^n n \cdot x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}a^{n-1}b + (n-2)\binom{n}{2}x^{n-3}a^{n-2}b^2$

$+ ... + \binom{n}{n-1} a \cdot 1 \cdot b^{n-1} + 0$

$= na\left[a^{n-1}x^{n-1} + (n-1)(ax)^{n-2}b + \frac{(n-2)(n-1)}{2}(ax)^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right]$

$= na\left((ax)^{n-1} + (n-1)(ax)^{n-2}b + \binom{n-1}{2}(ax)^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right)$

$= na(ax + b)^{n-1}$

હવે, $\frac{d}{dx}(ax + b)^m (cx + d)^n = (cx + d)^n \frac{d}{dx}(ax + b)^m + (ax + b)^m \frac{d}{dx}(cx + d)^n$

$= (cx + d)^n ma(ax + b)^{m-1} + (ax + b)^m nc(cx + d)^{n-1}$

$= (ax + b)^{m-1}(cx + d)^{n-1}[ma(cx + d) + nc(ax + b)]$

ઉદાહરણ 18 : $\frac{d}{dx}\left(\frac{a + bsinx}{c + dsinx}\right)$ શોધો. $(c + dsinx \neq 0)$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left(\frac{a + bsinx}{c + dsinx}\right) = \frac{(c + dsinx)\frac{d}{dx}(a + bsinx) - (a + bsinx)\frac{d}{dx}(c + dsinx)}{(c + dsinx)^2}$

$= \frac{(c + dsinx)bcosx - (a + bsinx)dcosx}{(c + dsinx)^2}$

$$= \frac{bc\cos x + bd\sin x\cos x - ad\cos x - bd\sin x\cos x}{(c + d\sin x)^2}$$

$$= \frac{(bc - ad)\cos x}{(c + d\sin x)^2}$$

ઉદાહરણ 19 : $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sin^n x}$. $(\sin x \neq 0)$, $n \in$ N મેળવો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી $\frac{d}{dx}\sin^n x = n\sin^{n-1}x\cos x$ સાબિત કરીશું.

$n = 1$ માટે, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = 1 \cdot \sin^0 x \cos x$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે, $\frac{d}{dx}\sin^k x = k\sin^{k-1}x\cos x$ એટલે કે કોઈક $k \in$ N માટે P(k) સત્ય છે.

$n = k + 1$ માટે $\frac{d}{dx}\sin^{k+1}x = \frac{d}{dx}\sin^k x \cdot \sin x$

$$= \sin x \frac{d}{dx}\sin^k x + \sin^k x \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= \sin x \cdot k\sin^{k-1}x\cos x + \sin^k x\cos x$$

$$= k \cdot \sin^k x\cos x + \sin^k x\cos x$$

$$= (k + 1)\sin^k x\cos x$$

$\therefore$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P($k + 1$) સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ $\forall n \in$ N, P(n) સત્ય છે.

હવે, $$\frac{d}{dx}\frac{x}{\sin^n x} = \frac{\sin^n x\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}\sin^n x}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{\sin^n x - x \cdot n\sin^{n-1}x\cos x}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{\sin^{n-1}x(\sin x - nx\cos x)}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{\sin x - nx\cos x}{\sin^{n+1}x}$$

ઉદાહરણ 20 : પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\sqrt{\sin x}$ નું વિકલિત મેળવો. **($\sin x > 0$)**

ઉકેલ : $$\frac{d}{dx}\sqrt{\sin x} = \lim_{t \to x}\frac{\sqrt{\sin t} - \sqrt{\sin x}}{t - x}$$

$$= \lim_{t \to x}\frac{\sin t - \sin x}{(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x})(t - x)}$$

$$= \lim_{t \to x}\frac{2\cos\frac{t+x}{2}\sin\frac{t-x}{2}}{(\sqrt{\sin t} + \sqrt{\sin x})\left(\frac{t-x}{2}\right)2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot 1}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

ઉદાહરણ 21 : વ્યાખ્યાની મદદથી $\frac{d}{dx}x^2 sinx$ મેળવો અને સૂત્રની મદદથી તે ચકાસો.

ઉકેલ :

$$\frac{d}{dx}x^2 sinx = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \sin(x+h) - x^2 sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \sin(x+h) - (x+h)^2 sinx + (x+h)^2 \sin x - x^2 sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (x+h)^2 \left(\frac{sin(x+h) - sinx}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 - x^2] \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \left(2cos\left(x+\frac{h}{2}\right) sin\frac{h}{2}\right)}{2 \cdot \frac{h}{2}} + \lim_{h \to 0} \frac{(2hx + h^2)\, sinx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \lim_{h \to 0} (2x + h)\, sinx$$

$$= x^2 cosx + 2x\, sinx$$

હવે, $\frac{d}{dx}x^2 sinx = x^2 \frac{d}{dx} sinx + sinx \frac{d}{dx} x^2$

$$= x^2\, cosx + 2x\, sinx$$

ઉદાહરણ 22 : $\frac{d}{dx}\frac{cosx}{1+sinx}$ શોધો. **($sinx \neq -1$)**

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\frac{cosx}{1+sinx} = \frac{(1+sinx)\frac{d}{dx}cosx - cosx\frac{d}{dx}(1+sinx)}{(1+sinx)^2}$

$$= \frac{(1+sinx)(-sinx) - cosx \cdot cosx}{(1+sinx)^2}$$

$$= \frac{-sinx - sin^2x - cos^2x}{(1+sinx)^2}$$

$$= \frac{-(1+sinx)}{(1+sinx)^2}$$ **($sin^2x + cos^2x = 1$)**

$$= \frac{-1}{1+sinx}$$

ઉદાહરણ 23 : $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + 1$ માટે $f'(1)$ શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + 1$

$f'(x) = 100x^{99} + 99x^{98} + ... + 0$

$\therefore \quad f'(1) = 100 + 99 + 98 + ... + 1 = \frac{100(101)}{2} = 5050$ $\left(\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

ઉદાહરણ 24 : $\frac{d}{dx}\frac{sinx + cosx}{sinx - cosx}$ શોધો. **$(sinx \neq cosx)$**

ઉકેલ :

$$\frac{d}{dx}\frac{sinx + cosx}{sinx - cosx} = \frac{(sinx - cosx)\frac{d}{dx}(sinx + cosx) - (sinx + cosx)\frac{d}{dx}(sinx - cosx)}{(sinx - cosx)^2}$$

$$= \frac{(sinx - cosx)(cosx - sinx) - (sinx + cosx)(cosx + sinx)}{(sinx - cosx)^2}$$

$$= \frac{-[(sinx - cosx)^2 + (sinx + cosx)^2]}{(sinx - cosx)^2}$$

$$= \frac{-2}{(sinx - cosx)^2} \qquad (sin^2x + cos^2x = 1)$$

ઉદાહરણ 25 : $f(x) = |x|$ માટે $f'(0)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : આપણે $\lim\limits_{h \to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}\frac{|h|}{h}$ શોધવાની છે.

હવે, $\lim\limits_{h \to 0+}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0+}\frac{h}{h} = 1,$

$\lim\limits_{h \to 0-}\frac{|h|}{h} = \lim\limits_{h \to 0-}\frac{-h}{h} = -1$

$\therefore$ $\lim\limits_{h \to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી.

$\therefore$ $f(x) = |x|$ એ $x = 0$ આગળ વિકલનીય નથી.

ઉદાહરણ 26 : $f : R \to Z$, $f(x) = [x]$. $f'(1)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$નું અસ્તિત્વ હોય તો તે શોધો.

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{જો } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{જો } 1 \le x < 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{h \to 0+}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0+}\frac{1-1}{h} = 0$ **($h > 0$, $1 + h > 1$ અને $[1 + h] = 1$)**

$\lim\limits_{h \to 0-}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0-}\frac{0-1}{h}$ નું અસ્તિત્વ નથી. **($h < 0$, $1 + h < 1$)**

$\therefore$ $f'(1)$નું અસ્તિત્વ નથી.

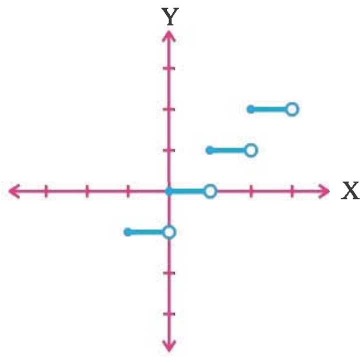
સમજૂતી : $\frac{1}{2} - h < x < \frac{1}{2} + h$ માટે $\left(h < \frac{1}{2}\right)$, $f(x) = 0$

$\therefore$ $f'(x) = 0$. તેથી $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore$ $\frac{1}{2} < h$ માટે અંતરાલ $\left(\frac{1}{2} - h, \frac{1}{2} + h\right)$ માં

f અચળ વિધેય હોવાથી,

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (આલેખ જુઓ.)



આકૃતિ 11.1

સ્વાધ્યાય 11

1. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેનાં વિધેયોના આપેલ બિંદુએ વિકલિત શોધો :

(1) $sinx$; $x = 0$ આગળ (2) $\frac{1}{x}$; $x = 1$ આગળ

(3) $2x + 3$; $x = 2$ આગળ (4) $\frac{3x+2}{2x+3}$; $x = 1$ આગળ

(5) $3x^2 - 2x + 1$; $x = -1$ આગળ (6) $cosx$; $x = \frac{\pi}{2}$ આગળ

(7) $tan\,x$; $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ (8) $secx$; $x = \frac{\pi}{3}$ આગળ

(9) $cot\,x$; $x = \frac{5\pi}{4}$ આગળ (10) $cosecx$; $x = \frac{\pi}{6}$ આગળ

2. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિકલિતો મેળવો : (યોગ્ય પ્રદેશ પર)

(1) $10x$ (2) $secx + tanx$ (3) $cosecx - cotx$

(4) $2sin^2x + 3cosx + 1$ (5) $cos2x$ (6) $sin2x$

(7) $tan2x$ (8) $\frac{1-cosx}{sinx}$ (9) $\frac{cosx}{1-sinx}$

(10) x^3 (11) x^4 (12) x^6

(13) sin^4x (14) cos^4x (15) sec^2x

3. $f(x) - g(x)$ અચળ વિધેય હોય તો સાબિત કરો કે, $f'(x) = g'(x)$.

4. વ્યાખ્યાની મદદથી $\frac{d}{dx}cos2x$ મેળવો અને મળતા પરિણામને $cos2x = cos^2x - sin^2x$ ની મદદથી ચકાસો.

5. $\frac{d}{dx}\frac{x^n-1}{x-1}$, $x \neq 1$ શોધો.

6. $\frac{d}{dx}\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{d}{dx}(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + ... + x + 1)$

$= (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + (n-3)x^{n-4} + ... + 1 + 0$

$\therefore$ $x = 1$ આગળ $\frac{d}{dx}\frac{x^n-1}{x-1} = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

ટિપ્પણી આપો !

નીચે વ્યાખ્યાયિત વિધેયોના વિકલિત મેળવો :

7. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ **8.** $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ $(x \neq a)$ **9.** $x^{-5}(7 + 3x)$

10. $x^{-6}(4x^2 - 8x^3)$ **11.** $2secx - 3tanx + 5sinx\,cosx$ **12.** $\frac{secx-1}{secx+1}$

13. $\frac{4x+7sinx}{5x+8cosx}$ **14.** $\frac{x}{1+cotx}$ **15.** $(x^2 - 1)sin^2x + (x^2 + 1)cos^2x$

16. $(ax^2 + bx + sinx)(p + qtanx)$ **17.** $sin(x + a)$

18. $\frac{sin(x+a)}{cosx}$ **19.** $tan(x + a)$

20. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $f(x) = sin^2x$ માટે $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ...... છે. ☐

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

(2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ માટે $f'(1) =$ ...... ☐

(a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) 1

(3) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^{99} + x^{100}$ માટે $f'(-1) =$ ...... ☐

(a) -50 (b) 50 (c) 5050 (d) -5050

(4) $\frac{d}{dx} cos^nx =$ ...... ☐

(a) $ncos^{n-1}x$ (b) $nsin^{n-1}x$

(c) $ncos^{n-1}x \, sinx$ (d) $-ncos^{n-1} x \, sinx$

(5) $\frac{d}{dx}(sin^2x + cos^2x) =$ ...... ☐

(a) $sin2x + cos2x$ (b) $sin2x - cos2x$ (c) 0 (d) $sinx + cosx$

(6) જો $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, તો $\frac{dy}{dx} =$ ...... ☐

(a) y (b) $y - x$ (c) $y - \frac{x^n}{n!}$ (d) $y - \frac{x^n}{(n-1)!}$

(7) જો $y = \sqrt{\frac{1-cos2x}{1+cos2x}}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, તો $\frac{dy}{dx} =$ ...... ☐

(a) sec^2x (b) $-sec^2x$ (c) cos^2x (d) $|tanx|$

(8) જો f એ a આગળ વિકલનીય હોય તો $\lim\limits_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} =$ ...... ☐

(a) $af'(a)$ (b) $f(a) - af'(a)$ (c) $f'(a)$ (d) $\frac{f'(a)}{a}$

(9) $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1$, $-1 < x < 1$, હોય તો $f'(x) =$ ...... ☐

(a) $\frac{1}{(x-1)^2}$ (b) $\frac{1}{x-1}$

(c) $\frac{1}{x^n - 1}$ (d) $\frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$

(10) $f(4) = 16$, $f'(4) = 2$ અને જો f એ 4 આગળ વિકલનીય હોય તો, $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{f(x)} - 4}{x - 4}$ ...... ☐

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{16}$

(11) $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $x \in [3, 5]$, હોય તો $f'(x)$ ......

(a) 1 છે. (b) −1 છે. (c) નું અસ્તિત્વ નથી. (d) 0 છે.

(12) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ માટે $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}$ = ...

(a) $-sinx$ (b) $sinx$ (c) $cosx$ (d) $sin2x$

(13) $\pi < x < 2\pi$ માટે, $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1-cos2x}{2}}$ = ...

(a) $sinx$ (b) $cosx$ (c) $-cosx$ (d) $-sin2x$

(14) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2-2x+1}$ $(x \in [-2, -1])$ ......

(a) નું અસ્તિત્વ નથી. (b) 0 છે. (c) 1 છે. (d) −1 છે.

(15) $\frac{d}{dx}(x + |x|)|x|$ $(x < 0)$ = ...

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 4

(16) $\frac{d}{dx}(x + |x|)|x|$ $(x > 0)$ = ...

(a) $-4x$ (b) $4x$ (c) $2x^2$ (d) x^2

(17) $\frac{d}{dx}|x|^2$ ...... ($x = 0$ આગળ)

(a) 0 છે. (b) નું અસ્તિત્વ નથી. (c) 2 છે. (d) 1 છે.

(18) $\frac{d}{dx}x|x| = (x > 0)$ ......

(a) x^2 (b) $-2x$ (c) $2x$ (d) 0

(19) $\frac{d}{dx}(cos^2x - sin^2x)$ = ...

(a) $sin2x$ (b) $cos2x$ (c) $-cos2x$ (d) $-2sin2x$

(20) $\frac{d}{dx}(3sinx - 4sin^3x)$ = ...

(a) $3cos3x$ (b) $cos3x$ (c) $3sin3x$ (d) $-3cos3x$

(21) $\frac{d}{dx}sin18^{\circ}$ = ...

(a) $cos18^{\circ}$ (b) $-sin18^{\circ}$ (c) $-cos18^{\circ}$ (d) 0

(22) $\frac{d}{dx}sinx^{\circ}$ = ...

(a) $cosx^{\circ}$ (b) $-sinx^{\circ}$ (c) $\frac{\pi}{180}cosx^{\circ}$ (d) 0

(23) $\frac{d}{dx}(2x + 3)^n$ = ...

(a) $n(2x + 3)^{n-1}$ (b) $2n(2x + 3)^{n-1}$

(c) $3n(2x + 3)^{n-1}$ (d) $2^n n(2x + 3)^{n-1}$

(24) $\frac{d}{dx}\sqrt{sinx}$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ = ... $\square$

(a) $\sqrt{cosx}$ (b) $\sqrt{sinx}$ (c) $\frac{cosx}{2\sqrt{sinx}}$ (d) $\frac{sinx}{2\sqrt{cosx}}$

(25) $\frac{d}{dx}\ tan^2x$ = ... $\square$

(a) $2tanx$ (b) sec^2x (c) cot^2x (d) $2tanx\ sec^2x$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓની ચર્ચા કરી :

1. વિકલનની વ્યાખ્યા તેમજ તેના પર આધારિત ઉદાહરણો.

2. વિકલિતની બૈજિક ક્રિયાઓ અને સૂત્રો આધારિત ઉદાહરણો

જો $f(x)$ અને $g(x)$ અંતરાલ (a, b)માં વિકલનીય હોય, તો

(1) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

(2) $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$

(3) $\frac{d}{dx}(f(x)\ g(x)) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$

(4) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

(5) $\frac{d}{dx}\ kf(x) = k\frac{d}{dx}f(x)$

3. કેટલાંક પ્રમાણિત સૂત્રો :

(1) $\frac{d}{dx}c = 0$

(2) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1},\ n \in N, x \in R$

(3) $\frac{d}{dx}sinx = cosx$

(4) $\frac{d}{dx}cosx = -sinx$

(5) $\frac{d}{dx}tanx = sec^2x$

(6) $\frac{d}{dx}cotx = -cosec^2x$

(7) $\frac{d}{dx}secx = secx\ tanx$

(8) $\frac{d}{dx}cosecx = -cosecx\ cotx$

4. બહુપદી તેમજ સંમેય વિધેયનું વિકલન

—❖—

Bhaskara I

Bhaskara wrote three astronomical contributions. In 629 he created the Aryabhatiya, written in verses, about mathematical astronomy. The comments referred exactly to the 33 verses dealing with mathematics. There he considered variable equations and trigonometric formulae.

His work *Mahabhaskariya* is divided into eight chapters about mathematical astronomy. In chapter 7, he gives a remarkable approximation formula for *sin x*, that is

$$sinx \sim \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$$