પ્રકરણ **3**

દ્વિપદી પ્રમેય

The laws of nature are but the mathematical thoughts of God.

– Euclid

*

I like mathematics because it is not human and has nothing particular to do with this planet or with the whole accidental universe, because like Spinoza's God, it won't love us in return.

– Bertrand Russell

*

If there is God, he is a great mathematician.

– Paul Dirac

3.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે આગળના વર્ગોમાં નીચેનાં વિસ્તરણોનો અભ્યાસ કર્યો છે :

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ અને $(a + b)^4$ મેળવવા

$(a + b)^3$ નો $(a + b)$ વડે ગુણાકાર કરીએ તો તેનું વિસ્તરણ મેળવી શકીએ.

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

જો કે, આ જ પ્રમાણે ગુણાકારના ઉપયોગથી $(a + b)^5$, $(a + b)^6$,... જેવાં વિસ્તરણ મેળવવાં મુશ્કેલ પડે.

એવું માનવામાં આવે છે કે, ધન પૂર્ણાંક n માટે $(a + b)^n$ નું વ્યાપક સૂત્ર અગિયારમી સદીના જાણીતા પર્શિયન કવિ અને ગણિતજ્ઞ **ઓમર ખૈયામે** આપ્યું હતું. આ સૂત્ર અથવા વિસ્તરણને **દ્વિપદી પ્રમેય (Binomial Theorem)** કહે છે.

ચોથી સદી (B.C.)ના **ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી યુક્લિડે** દ્વિપદી પ્રમેયના વિસ્તરણનું $n = 2$ માટે વિશિષ્ટ ઉદાહરણ આપ્યું. ત્રીજી સદી (B.C.)માં **ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી પિંગલા (Pingala)**એ ઉચ્ચકક્ષા માટેના વિસ્તરણની વાત કરી હતી. 10મી સદીમાં વ્યાપક દ્વિપદી પ્રમેય અને પાસ્કલના ત્રિકોણની વિગતોથી **ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી હલાયુધ (Halayadha)** પરિચિત હતા. **પર્શીયન ગણિતશાસ્ત્રી અલ-કરજી (Al-Karaji)** અને 13મી સદીમાં ચીની ગણિતશાસ્ત્રી **યાન્ગ હુએ (Yang-hui)** પણ આવા જ પરિણામો મેળવ્યા હતાં.

$n = 1, 2, 3,...$ લઈ, $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણમાં આવતાં ક્રમિક પદોના સહગુણકો નીચે આપેલી ત્રિકોણીય રીતે ગોઠવાયેલી સંખ્યાઓની હાર પરથી પણ મેળવી શકાય છે. આ ગોઠવણી ફ્રેન્ચ ગણિતજ્ઞ **બ્લેઝ પાસ્કલ** (1623-1662) ના નામથી **પાસ્કલનો ત્રિકોણ (Pascal's Triangle)** તરીકે જાણીતી છે.

ઘાતાંક	સહગુણક										
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

પાસ્કલના ત્રિકોણની કોઈ પણ હારમાં પ્રથમ અને છેલ્લો ઘટક 1 છે. આ બે ઘટકની વચ્ચેના ઘટક એ ઘટકની ઉપરની હારના બે તીરના આરંભબિંદુ પરની સંખ્યાઓનો સરવાળો છે.

પાસ્કલનો ત્રિકોણ : પ્રથમ હાર : 1 1

એટલે કે, $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

બીજી હાર : 1 2 1

અહીં પ્રથમ અને છેલ્લા ઘટક 1 અને વચ્ચેનું પદ 2, પ્રથમ હારનાં બે પદોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે, કારણ કે $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$ $\left(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}\right.$ **ના ઉપયોગથી**$\left.\right)$

તે જ પ્રમાણે, ત્રીજી હાર 1 3 3 1 માં પ્રથમ અને છેલ્લું પદ 1, બીજું પદ એ બીજી હારનાં પ્રથમ અને દ્વિતીય પદનો સરવાળો $1 + 2 = 3$, જે $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$ છે અને ત્રીજું પદ એ બીજી હારનાં દ્વિતીય અને તૃતીય પદનો સરવાળો $2 + 1 = 3$, જે $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$ છે.

ઉપરની ચર્ચા પરથી, આ જ પ્રમાણે પાંચમી હાર આપણે ચકાસીએ.

ચોથી હાર : 1 4 6 4 1

એટલે કે, $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

હવે પાંચમી હાર : 1 $(1 + 4)$ $(4 + 6)$ $(6 + 4)$ $(4 + 1)$ 1

1 5 10 10 5 1

એટલે કે, $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

અહીં, $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} = \binom{5}{1}$; $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$; $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$; $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$.

$$\left(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}\right).$$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$, સૂત્ર તથા $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, ના ઉપયોગથી પાસ્કલનો ત્રિકોણ નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય.

ઘાતાંક					સહગુણક					
1				$\binom{1}{0}$		$\binom{1}{1}$				
2			$\binom{2}{0}$		$\binom{2}{1}$		$\binom{2}{2}$			
3		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
4	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

ઉપરની ગોઠવણીના અવલોકન પરથી, આગળની હાર લખ્યા સિવાય આપણે કોઈ પણ ઘાતાંક n માટે $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો લખી શકીએ, દાખલા તરીકે ઘાતાંક 7 માટે આપણને પદોના સહગુણકો $\binom{7}{0}$, $\binom{7}{1}$, $\binom{7}{2}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{7}{6}$, $\binom{7}{7}$ મળે.

હવે આપણે કોઈ પણ ધનપૂર્ણાંક n માટે $(a + b)^n$ નું દ્વિપદી વિસ્તરણ લખવા માટે સક્ષમ છીએ.

3.2 દ્વિપદી પ્રમેય

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + ... + \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + ... + \binom{n}{n}b^n, \ n \in \mathbb{N}$$

આ પ્રમેય આપણે ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી સાબિત કરીશું.

ધારો કે, $P(n) : (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + ... + \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + ... + \binom{n}{n}b^n$

$n = 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= (a + b)^1 = a + b$ અને જ.બા. $= \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}a^{1-1} \cdot b = a + b$

$\therefore$ P(1) સત્ય છે.

ધારો કે P(k) સત્ય છે.

$$\therefore \quad (a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1} \cdot b + \binom{k}{2}a^{k-2} \cdot b^2 + ... + \binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)} \cdot b^{r-1} + \binom{k}{r}a^{k-r} \cdot b^r + ... + \binom{k}{k}b^k$$

હવે, $(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$

$$= (a + b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1} \cdot b + \binom{k}{2}a^{k-2} \cdot b^2 + ... + \binom{k}{r-1}a^{k-(r-1)} \cdot b^{r-1} + \binom{k}{r}a^{k-r} \cdot b^r + ... + \binom{k}{k}b^k\right]$$

બંને અવયવોનો ગુણાકાર કરી પદોનું પુનર્ગઠન કરતાં, આપણે જોઈ શકીએ કે,

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^k \cdot b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1} \cdot b^2 + ... + \left[\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r}\right]a^{k-(r-1)} \cdot b^r + ... + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ અને $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$, $1 \le r \le n$

$\therefore \quad (a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^{(k+1)-1} \cdot b + \binom{k+1}{2}a^{(k+1)-2} \cdot b^2 + ...$

$$+ \binom{k+1}{r}a^{(k+1)-r} \cdot b^r + ... + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$\therefore$ P$(k + 1)$ સત્ય છે.

$\therefore$ ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી P(n), $\forall n \in$ N માટે સત્ય છે.

કેટલાંક ઉપપ્રમેયો :

(1) $(a + b)^n$ ના દ્વિપદી વિસ્તરણમાં $a = 1$, $b = x$ મૂકતાં,

$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{r}x^r + ... + \binom{n}{n}x^n$, $\forall n \in$ N

(2) b ના બદલે $-b$ મૂકતાં,

$(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + ...$

$$+ (-1)^r \cdot \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r + ... + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}b^n$$

(3) (1) માં $x = 1$ લેતાં,

$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{r} + ... + \binom{n}{n}$

$\therefore \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{r} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

(4) (1) માં $x = -1$ લેતાં,

$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$ **(i)**

વળી, $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n}$ **(ii)**

$\therefore$ (i) તથા (ii) નાં અનુરૂપ પદોનો સરવાળો કરતાં,

$2^n = 2\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ...\right]$

$\therefore \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = 2^{n-1}$ **(iii)**

$\therefore \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... = 2^{n-1}$ **((i) તથા (iii) પરથી) (iv)**

નોંધ : $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણ પરથી, આપણે નીચેના મુદ્દાઓનું અવલોકન કરીએ :

(1) વિસ્તરણમાં $(n + 1)$ પદો છે.

(2) પ્રથમ પદમાં 'a' નો ઘાતાંક n છે અને ત્યાર પછી ક્રમશઃ પદોમાં 'a' નો ઘાતાંક 1 જેટલો ઘટતો જાય છે અને સાથે સાથે પ્રથમ પદમાં 'b' નો ઘાતાંક શૂન્ય છે અને ત્યાર પછી ક્રમશઃ પદોમાં 'b' નો ઘાતાંક 1 જેટલો વધતો જાય છે.

(3) દરેક પદની ઘાત (એટલે કે a અને bના ઘાતાંકનો સરવાળો) n છે જે $(a + b)$નો ઘાતાંક છે.

(4) પદોના સહગુણકો ક્રમશઃ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}$ છે.

(5) આપણે જાણીએ છીએ કે, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. તેથી વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો ક્રમશઃ ડાબી તથા જમણી તરફથી સંમિત રીતે ગોઠવાયેલાં છે, એટલે કે,

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$; $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$,...

ઉદાહરણ 1 : વિસ્તરણ કરો : $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^5$, $x \neq 0$

ઉકેલ : અહીં $a = \frac{x}{2}$, $b = \frac{1}{x}$, $n = 5$

આ કિંમતો દ્વિપદી પ્રમેય (સૂત્ર)માં મૂકતાં,

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{5}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= 1\left(\frac{x^5}{32}\right) + 5\left(\frac{x^4}{16}\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{5\cdot4}{1\cdot2}\left(\frac{x^3}{8}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$+ \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x^4}\right) + 1\cdot\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

$$= \frac{x^5}{32} + \frac{5x^3}{16} + \frac{5x}{4} + \frac{5}{2x} + \frac{5}{2x^3} + \frac{1}{x^5}$$

ઉદાહરણ 2 : વિસ્તરણ કરો : $\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^4$, $x \neq 0$

ઉકેલ : $a = 2x$, $b = 1 - \frac{1}{x}$, $n = 4$ ઉપપ્રમેય (2)માં મૂકતાં,

$$\left(2x-1+\frac{1}{x}\right)^4 = \left[2x-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^4$$

$$= \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3\left(1-\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}(2x)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 - \binom{4}{3}(2x)\left(1-\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+ \binom{4}{4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= 16x^4 - 4(8x^3)\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{4\cdot3}{1\cdot2}(4x^2)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$- \frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}(2x)\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$+ \left[\binom{4}{0} - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \binom{4}{3}\left(\frac{1}{x^3}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]$$

$$= 16x^4 - 32x^3 + 32x^2 + 24x^2 - 48x + 24 - 8x + 24 - \frac{24}{x} + \frac{8}{x^2}$$

$$+ 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

$$= 16x^4 - 32x^3 + 56x^2 - 56x + 49 - \frac{28}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}.$$

ઉદાહરણ 3 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(0.99)^5$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $(0.99)^5 = (1 - 0.01)^5$

$$= \binom{5}{0} - \binom{5}{1}(0.01) + \binom{5}{2}(0.01)^2 - \binom{5}{3}(0.01)^3 + \binom{5}{4}(0.01)^4 - \binom{5}{5}(0.01)^5$$

$$= 1 - 5(0.01) + 10(0.0001) - 10(0.000001) + 5(0.00000001) - (0.0000000001)$$

$$= 0.9509900499$$

ઉદાહરણ 4 : $(1.1)^{100000}$ અને 10000 માંથી કોણ નાનું છે ?

ઉકેલ : $(1.1)^{100000} = (1 + 0.1)^{100000}$

$= \binom{100000}{0} + \binom{100000}{1}(0.1) +$ કેટલાંક ધન પદો

$= 1 + 10000 +$ કેટલાંક ધન પદો

> 10000

$\therefore$ $(1.1)^{100000}$ તથા 10000 પૈકી 10000 નાની સંખ્યા છે.

સ્વાધ્યાય 3.1

1. વિસ્તરણ કરો :

(1) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5, (x \neq 0)$ (2) $(1 - 2x)^4$ (3) $(3x - 2)^6$ (4) $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^5, (x \neq 0)$

2. વિસ્તરણ કરો : (1) $(1 + x + x^2)^4$ (2) $(1 - x + x^2)^3$

3. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી કિંમત શોધો :

(1) $(0.98)^4$ (2) $(99)^4$ (3) $(101)^6$

4. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી $(1.01)^{10000}$ અને 100 માંથી કોણ મોટું છે તે નક્કી કરો.

*

3.3 વ્યાપક અને મધ્યમ પદ

1. $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણમાં $(n + 1)$ પદ હોય છે, આપણે $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનાં પ્રથમ, દ્વિતીય, તૃતીય ...$(n + 1)$ માં પદને અનુક્રમે $T_1, T_2, T_3, ..., T_{n+1}$ કહીએ તો,

$T_1 = \binom{n}{0}a^n,\ T_2 = \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b,\ T_3 = \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2, ..., T_{n+1} = \binom{n}{n}b^n.$

આ પદોનાં અવલોકન પરથી આપણને **વ્યાપક પદ (General Term) $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r, 0 \le r \le n$** મળે.

2. જો $(a + b)^n$ માં n યુગ્મ હોય, તો $n + 1$ અયુગ્મ થશે. તેથી $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું પદ એટલે કે $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું પદ $= \left(\frac{n+2}{2}\right)$ મું પદ **મધ્યમ પદ (Middle Term)** થશે.

દાખલા તરીકે, $(2x + y)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{10+2}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ એ મધ્યમ પદ થશે.

જો n અયુગ્મ હોય, તો $n + 1$ યુગ્મ થશે. તેથી **બે મધ્યમ પદો મળશે, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ મું પદ.**

દાખલા તરીકે, $(2x + y)^9$ ના વિસ્તરણમાં $\frac{9+1}{2} = 5$મું પદ અને $\frac{9+3}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ મધ્યમ પદ થશે.

ઉદાહરણ 5 : $(3x - y)^7$ ના વિસ્તરણનું ચોથું પદ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3x,\ b = -y,\ n = 7$

હવે, $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$

T_4 શોધવા માટે $r = 3$ લેતાં, **$(r + 1 = 4)$**

$\therefore \quad T_4 = T_{3+1} = \binom{7}{3}(3x)^{7-3} \cdot (-y)^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}(81x^4)(-y)^3$

$= -2835x^4y^3$

ઉદાહરણ 6 : $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{16}$, $(x \neq 0)$ ના વિસ્તરણમાં x^{-2} નો સહગુણક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $a = x$, $b = -\frac{1}{x^2}$, $n = 16$

$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r$

$= \binom{16}{r}(x)^{16-r} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{16}{r}(-1)^r \cdot x^{16-3r}$

x નો ઘાતાંક -2 મેળવવા આપણે $16 - 3r = -2$ એટલે કે $r = 6$ લઈશું.

$\therefore \quad T_{6+1} = \binom{16}{6}(-1)^6 \cdot x^{16-3(6)}$

$\therefore \quad T_7 = \binom{16}{6} \cdot 1 \cdot x^{-2}$

$\therefore \quad x^{-2}$ નો સહગુણક $\binom{16}{6}$ અથવા 8008 મળે.

ઉદાહરણ 7 : $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$, $(x \neq 0)$ ના વિસ્તરણમાં અચળ પદ અસ્તિત્વ ધરાવે, તો મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે અચળ પદ (એટલે કે જે પદમાં x નો ઘાતાંક શૂન્ય છે) અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને તે $(r + 1)$મું પદ છે.

અહીં, $a = 2x^2$, $b = -\frac{1}{x}$, $n = 11$

$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r$

$= \binom{11}{r}(2x^2)^{11-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = \binom{11}{r}(2)^{11-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{22-3r}$

અચળ પદ માટે, x નો ઘાતાંક શૂન્ય લેતાં,

$\therefore \quad 22 - 3r = 0$

$\therefore \quad r = \frac{22}{3} \notin N.$

$\therefore$ આપણી ધારણા ખોટી છે.

$\therefore$ આપેલ વિસ્તરણમાં અચળ પદનું અસ્તિત્વ નથી.

ઉદાહરણ 8 : $\left(\frac{x}{2} + 3y\right)^9$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ/પદો શોધો.

ઉકેલ : $n = 9$ અયુગ્મ હોવાથી, આપણને બે મધ્યમ પદો મળશે.

જે $\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$મું અને $\frac{n+3}{2} = \frac{9+3}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ છે.

અહીં, $a = \frac{x}{2}$, $b = 3y$, $n = 9$

$T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r} \cdot b^r$

$\therefore \quad T_5 = T_{4+1} = \binom{9}{4} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{9-4} \cdot (3y)^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{x^5}{32}\right)(81y^4) = \frac{5103}{16}\ x^5y^4$

અને $T_6 = \binom{9}{5} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{9-5} \cdot (3y)^5$ **$(r + 1 = 6)$**

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{x^4}{16}\right)(243y^5)$$

$$= \frac{15309}{8}\ x^4y^5$$

$\therefore$ મધ્યમ પદો $\frac{5103}{16}\ x^5y^4$ અને $\frac{15309}{8}\ x^4y^5$ છે.

ઉદાહરણ 9 : $\left(\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2x^2}}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણનું અચળ પદ મેળવો. **$(x > 0)$**

ઉકેલ : અહીં, $T_{r+1} = \binom{12}{r}\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^{12-r} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{2x^2}}\right)^r$

$$= \binom{12}{r} \cdot \frac{\sqrt{3}^r}{(\sqrt{3})^{12-r}} \times \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \cdot x^{6-\frac{r}{2}-r}$$

$$= \binom{12}{r} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^{12-2r}} \times \frac{1}{(\sqrt{2})^r} \times x^{6-\frac{3r}{2}}$$

અચળ પદ માટે, $6 - \frac{3r}{2} = 0$ લેતાં, $r = 4$

$$T_5 = \binom{12}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{55}{4}$$

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (1) $(x + 2)^9$ ના વિસ્તરણમાં x^6 નો અને (2) $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$, $(x \neq 0)$ ના વિસ્તરણમાં x^{32} નો સહગુણક મેળવો.

2. અચળ પદ મેળવો : (1) $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{3}\right)^{10}$, $(x > 0)$ (2) $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$, $(x \neq 0)$

3. $\left(2 + \frac{x}{3}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^7 અને x^8 ના સહગુણક સમાન હોય, તો n શોધો.

4. નીચેના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ / પદો શોધો :

(1) $\left(2 - \frac{x^3}{3}\right)^7$ (2) $\left(\frac{x}{2} + 3y\right)^8$ (3) $\left(\frac{3}{2x} - \frac{2x^2}{3}\right)^{20}$, $(x \neq 0)$ (4) $(3x + 2y)^5$

5. $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક 20 હોય, તો n શોધો.

6. $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં 5 મા, 6 ઠ્ઠા અને 7 મા પદોના સહગુણકો સમાંતર શ્રેણીમાં હોય, તો n શોધો.

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 10 : $(1 - x)^{15} \cdot (1 + 3x)^4$ ના ગુણાકારના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક મેળવો.

ઉકેલ : $(1 - x)^{15}$ અને $(1 + 3x)^4$ ના વિસ્તરણ માટે દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં,

$(1-x)^{15} = \binom{15}{0} - \binom{15}{1}x + \binom{15}{2}x^2 - \binom{15}{3}x^3 + ... - \binom{15}{15}x^{15}$ અને

$(1+3x)^4 = (3x+1)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4 + \binom{4}{1}(3x)^3 + \binom{4}{2}(3x)^2 + \binom{4}{3}(3x) + \binom{4}{4} \cdot 1$

હવે $(1-x)^{15} \cdot (1+3x)^4$ ના ગુણાકારમાં x^3 નો સહગુણક મેળવવા માટે, આપણે પૂરેપૂરો ગુણાકાર કરવાને બદલે ફક્ત x^3 વાળા પદો એકઠાં કરીએ.

તે $\binom{15}{0} \cdot \binom{4}{1}(27x^3) - \binom{15}{1}x \cdot \binom{4}{2}(9x^2) + \binom{15}{2}x^2 \cdot \binom{4}{3}(3x) - \binom{15}{3}x^3 \cdot \binom{4}{4}$

$= 1 \cdot 4 \cdot 27x^3 - 15 \cdot x \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 9x^2 + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}x^2 \cdot 4 \cdot 3x - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \cdot 1$

$= (108 - 810 + 1260 - 455)x^3 = 103x^3$

$\therefore$ $(1-x)^{15} \cdot (1+3x)^4$ ના વિસ્તરણમાં x^3 નો સહગુણક 103 છે.

ઉદાહરણ 11 : $\left(\frac{x}{3}+3\right)^{10}$ ના વિસ્તરણમાં મધ્યમ પદ 8064 હોય, તો x શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $n = 10$

$\therefore$ n યુગ્મ હોવાથી, મધ્યમ પદ $\frac{n+2}{2} = \frac{10+2}{2} = 6$ઠ્ઠું પદ થશે.

$\therefore$ $T_6 = T_{5+1} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{10-5} \cdot (3)^5$

$\therefore$ $8064 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{x^5}{3^5} \cdot 3^5$

$\therefore$ $\frac{8064}{252} = x^5$

$\therefore$ $x^5 = 32 = 2^5$

$\therefore$ $x = 2$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો : $(3+\sqrt{8})^5 + (3-\sqrt{8})^5 = 6726$. તે પરથી તારવો કે, $6725 < (3+\sqrt{8})^5 < 6726$. આ પરથી $[(3+\sqrt{8})^5]$ મેળવો.

ઉકેલ : $(3+\sqrt{8})^5 = \binom{5}{0}(3)^5 + \binom{5}{1}(3)^4(\sqrt{8}) + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 + \binom{5}{3}(3)^2(\sqrt{8})^3$
$+ \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 + \binom{5}{5}(\sqrt{8})^5$ **(i)**

$(3-\sqrt{8})^5 = \binom{5}{0}(3)^5 - \binom{5}{1}(3)^4(\sqrt{8}) + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 - \binom{5}{3}(3)^2(\sqrt{8})^3$
$+ \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4 - \binom{5}{5}(\sqrt{8})^5$ **(ii)**

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$(3+\sqrt{8})^5 + (3-\sqrt{8})^5 = 2\left[\binom{5}{0}(3)^5 + \binom{5}{2}(3)^3(\sqrt{8})^2 + \binom{5}{4}(3)(\sqrt{8})^4\right]$$

$$= 2\left[1 \cdot 243 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 27 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 64\right] \qquad \left(\binom{5}{4} = \binom{5}{1}\right)$$

$$= 2[243 + 2160 + 960]$$

$$= 2[3363]$$

$$= 6726$$

હવે, $(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 9 - 8 = 1$ અને $(3 + \sqrt{8}) > 0$. તેથી $3 - \sqrt{8} > 0$.

તથા $(3 + \sqrt{8}) > 1$

$\therefore \quad 3 - \sqrt{8} < 1$

$\therefore \quad 0 < 3 - \sqrt{8} < 1$

$\therefore \quad 0 < (3 - \sqrt{8})^5 < 1$

$\therefore \quad (3 + \sqrt{8})^5 < (3 + \sqrt{8})^5 + (3 - \sqrt{8})^5 = 6726 < (3 + \sqrt{8})^5 + 1$

$\therefore \quad (3 + \sqrt{8})^5 < 6726$ અને $6726 < (3 + \sqrt{8})^5 + 1$

$\therefore \quad 6725 < (3 + \sqrt{8})^5 < 6726$

પૂર્ણાંક ભાગની વ્યાખ્યા અનુસાર સ્પષ્ટ છે કે $[(3 + \sqrt{8})^5] = 6725$

ઉદાહરણ 13 : $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ના વિસ્તરણમાં xની ઘાતવાળા પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 127 હોય, તો n શોધો. $(x \neq 0)$ $(n \in N)$

ઉકેલ : $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદો $\binom{n}{0}(x^2)^n$, $\binom{n}{1}(x^2)^{n-1} \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)$ અને $\binom{n}{2}(x^2)^{n-2} \cdot \left(\frac{-2}{x}\right)^2$ છે.

આ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 127 છે. તેથી

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2} \cdot 4 = 127$

$\therefore \quad 1 - 2n + \frac{4n(n-1)}{2} = 127$

$\therefore \quad 1 - 2n + 2n(n - 1) = 127$

$\therefore \quad 1 - 2n + 2n^2 - 2n - 127 = 0$

$\therefore \quad 2n^2 - 4n - 126 = 0$

$\therefore \quad n^2 - 2n - 63 = 0$

$\therefore \quad (n - 9)(n + 7) = 0$

$\therefore \quad n = 9$ or $n = -7$. પરંતુ $-7 \notin N$

$\therefore \quad n = 9$

ઉદાહરણ 14 : દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી બતાવો કે, $8^n - 7n$ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે છે.

ઉકેલ : $8^n = (1 + 7)^n$

$= 1 + \binom{n}{1}7 + \binom{n}{2}7^2 + \binom{n}{3}7^3 + \ldots + \binom{n}{n}7^n$

$= 1 + 7n + 7^2\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}7 + \ldots + \binom{n}{n}7^{n-2}\right]$

$\therefore \quad 8^n - 7n = 1 + 49m$, જ્યાં $m = \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}7 + \ldots + \binom{n}{n}7^{n-2}\right] \in N$

$\therefore \quad 8^n - 7n$ને 49 વડે ભાગતાં શેષ 1 વધે છે.

ઉદાહરણ 15 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \forall n \in N$

ઉકેલ : [વિચારો : જુઓ કે જ.બા. $= \frac{(2n)!}{(n!)(n!)} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \binom{2n}{n}$.

જે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક છે.]

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (x + 1)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right] \times$$

$$\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}\right]$$

હવે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^n નો સહગુણક $\binom{2n}{n}$ છે અને

જ.બા.માં x^n નો સહગુણક $= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2$ **(પદવાર ગુણાકાર કરતાં)**

$$\therefore \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

ઉદાહરણ 16 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}, \forall n \in N$

ઉકેલ : [વિચારો : જુઓ કે જ.બા. $= \frac{(2n)!}{[2n-(n-1)]!(n-1)!} = \binom{2n}{n-1}$

જે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-1} નો સહગુણક છે.]

$$(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n (x + 1)^n$$

$$= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right] \times$$

$$\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3} + ... + \binom{n}{n}\right]$$

હવે $(1 + x)^{2n}$ ના વિસ્તરણમાં x^{n-1} નો સહગુણક $\binom{2n}{n-1}$ છે અને

જ.બા.માં x^{n-1} નો સહગુણક $\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

$$\therefore \binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

ઉદાહરણ 17 : સાબિત કરો : $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + ... + (2n+1)\binom{n}{n} = (n+1)2^n, \forall n \in N$

ઉકેલ : ધારો કે $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + ... + (2n-1)\binom{n}{n-1} + (2n+1)\binom{n}{n} = S$ **(i)**

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, પદોને ઉલટા ક્રમમાં ગોઠવતાં,

$(2n+1)\binom{n}{0} + (2n-1)\binom{n}{1} + (2n-3)\binom{n}{2} + ... + 5\binom{n}{n-2} + 3\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = S$ **(ii)**

(i) અને (ii) નાં અનુરૂપ પદોનો સરવાળો કરતાં,

$$\therefore (1 + (2n+1))\binom{n}{0} + (3 + (2n-1))\binom{n}{1} + (5 + (2n-3))\binom{n}{2} + ... +$$

$$((2n-3) + 5)\binom{n}{n-2} + ((2n-1) + 3)\binom{n}{n-1} + ((2n+1) + 1)\binom{n}{n} = 2S$$

$\therefore \quad (2n + 2)\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}\right] = 2S$

$\therefore \quad 2(n + 1) \cdot 2^n = 2S$

$\therefore \quad S = (n + 1)2^n$

તેથી, $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + ... + (2n + 1)\binom{n}{n} = (n + 1)2^n$.

ઉદાહરણ 18 : $(x - 2y)^n$ ના વિસ્તરણમાં જો પાંચમાં અને છઠ્ઠા પદોનો સરવાળો શૂન્ય હોય, તો $\frac{x}{y}$નું મૂલ્ય શોધો. જો $n = 8$ હોય તો $\frac{x}{y}$ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $T_5 = \binom{n}{4} \cdot x^{n-4} \cdot (-2y)^4$ અને $T_6 = \binom{n}{5} \cdot x^{n-5} \cdot (-2y)^5$

અહીં, $T_5 + T_6 = 0$. આથી, $T_5 = -T_6$

$\therefore \quad \binom{n}{4} \cdot (-2)^4 \cdot x^{n-4} \cdot y^4 = -\binom{n}{5} \cdot (-2)^5 \cdot x^{n-5} \cdot y^5$

$\therefore \quad \frac{n!}{4!(n-4)!} \cdot 16 \cdot x^{n-4} \cdot y^4 = -\frac{n!}{5!(n-5)!} \cdot (-32) \cdot x^{n-5} \cdot y^5$

$\therefore \quad \frac{x^{n-4} \cdot y^4}{x^{n-5} \cdot y^5} = \frac{n!}{5!(n-5)!} \times \frac{4!(n-4)!}{n!} \times \frac{32}{16}$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{4!(n-4)(n-5)!}{5 \cdot 4!(n-5)!} \times 2$

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{n-4}{5} \times 2$

હવે, $n = 8$ લેતાં, $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$

ઉદાહરણ 19 : $(1 + x)^{59}$ ના વિસ્તરણમાં છેલ્લા 30 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો મેળવો.

ઉકેલ : $(1 + x)^{59}$ ના વિસ્તરણમાં કુલ 60 પદો મળશે.

$\therefore$ છેલ્લાં 30 પદોના સહગુણકોનો સરવાળો,

$S = \binom{59}{30} + \binom{59}{31} + \binom{59}{32} + ... + \binom{59}{58} + \binom{59}{59}$ (પ્રથમ 30 સહગુણકો $\binom{59}{0}, \binom{59}{1}, ..., \binom{59}{29}$) (i)

એટલે કે $S = \binom{59}{29} + \binom{59}{28} + \binom{59}{27} + ... + \binom{59}{1} + \binom{59}{0}$ ($\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ સૂત્રના ઉપયોગથી) (ii)

$\therefore \quad 2S = \binom{59}{0} + \binom{59}{1} + ... + \binom{59}{59}$ ((i) અને (ii)ની અનુરૂપ બાજુઓનો સરવાળો કરતાં)

$\therefore \quad S = \frac{2^{59}}{2} = 2^{58}$

સ્વાધ્યાય 3

1. $(1 + x)^{2n}$ અને $(1 + x)^{2n-1}$ના વિસ્તરણમાં x^n ના સહગુણકોનો ગુણોત્તર મેળવો.
2. જો $(1 + x)^{36}$ ના વિસ્તરણમાં $(r - 2)$ માં અને $(2r - 5)$માં પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો r શોધો.
3. જો $(x + y)^n$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદો અનુક્રમે 64, 960 અને 6000 હોય, તો x, y અને n શોધો.
4. જો $(a + b)^n$ના વિસ્તરણમાં બીજા, ત્રીજા અને ચોથા પદ અનુક્રમે 240, 720 અને 1080, હોય, તો a, b અને n શોધો.

5. સાબિત કરો : $(2 + \sqrt{3})^7 + (2 - \sqrt{3})^7 = 10084$, તથા તે પરથી તારવો કે, $10083 < (2 + \sqrt{3})^7 < 10084$.

6. જો $\left(\sqrt[5]{2} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}}\right)^n$ ના વિસ્તરણમાં ચોથા પદ અને છેલ્લેથી ચોથા પદનો ગુણોત્તર 6 : 1 હોય તો n શોધો.

7. $(1 - x)^{12} \cdot (1 + 2x)^6$ ના વિસ્તરણમાં x^4 નો સહગુણક મેળવો.

8. જો $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$, $(x \neq 0)$ના વિસ્તરણમાં પ્રથમ ત્રણ પદોના સહગુણકોનો સરવાળો 376 હોય, તો x^8 નો સહગુણક શોધો.

9. દ્વિપદી પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી બતાવો કે, $3^{2n} - 8n - 1$ એ 64 વડે વિભાજ્ય છે. $n \in N$.

10. સાબિત કરો : $(\forall n \in N)$

(1) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + ... + (n + 1)\binom{n}{n} = (n + 2) \cdot 2^{n-1}$

(2) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + ... + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

11. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને $\square$ માં લખો :

(1) જો $(1 + x)^n$ ના વિસ્તરણમાં 5 મા અને 19 મા પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો n ...... છે. $\square$

(a) 18 (b) 24 (c) 22 (d) 20

(2) જો $(1 + x)^{32}$ ના વિસ્તરણમાં $(r - 6)$ મા અને $(2r - 2)$ મા પદોના સહગુણકો સમાન હોય, તો r ...... છે. $\square$

(a) -2 (b) 14 (c) 34 (d) 20

(3) $(x + x^2)^{20}$ ના વિસ્તરણમાં x^{21} નો સહગુણક ...... છે. $\square$

(a) $\binom{20}{1}$ (b) $\binom{20}{0}$ (c) $\binom{20}{2}$ (d) $\binom{20}{12}$

(4) $(2x + 3y + 4z)^5$ ના વિસ્તરણમાં $x^a\, y^b\, z^c$ પ્રકારના પદોની સંખ્યા ...... છે. $\square$

(a) 10 (b) 15 (c) 21 (d) 42

(5) જો $(2 + \sqrt{3})^4 + (2 - \sqrt{3})^4 = x + y\sqrt{3}$, તો y ...... છે. $\square$

(a) 0 (b) 56 (c) 112 (d) 97

(6) જો $(a + b)^{10}$ નું મધ્યમ પદ T_{r-1} હોય, તો r = ... $\square$

(a) 6 (b) 5 (c) 7 (d) 8

(7) $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ ના વિસ્તરણનું અચળ પદ ...... છે. $(x \neq 0)$ $\square$

(a) 7920 (b) 495 (c) -7920 (d) -495

(8) $\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n-1}{n-1}$ = ... $(n > 1)$ $\square$

(a) 2^n (b) 2^{n-1} (c) $2^n - 1$ (d) $2^{n-1} - 1$

(9) $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^8$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ ...... છે. $(x \neq 0)$ ☐

(a) $\binom{8}{4}$ (b) $\binom{8}{4}(2x)$ (c) $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2x}\right)$ (d) $\binom{8}{4}(2)$

(10) $(x + y)^{15}$ ના વિસ્તરણમાં $x^{13}y^2$ અને x^2y^{13} ના સહગુણકોનો સરવાળો .... છે. ☐

(a) $\binom{15}{2}$ (b) $2\binom{15}{13}$ (c) $\binom{15}{3}$ (d) $2\binom{15}{3}$

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેનાં મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણ

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + ... + \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r + ... + \binom{n}{n}b^n, n \in \mathrm{N}$ ને **દ્વિપદી પ્રમેય** કહે છે.

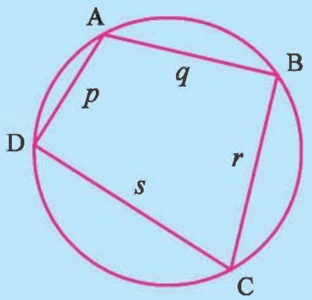
2. દ્વિપદી પ્રમેયના સહગુણકોની હારબદ્ધ ગોઠવણીને **પાસ્કલનો ત્રિકોણ** કહે છે.

3. $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ $\mathrm{T}_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}\cdot b^r$ છે.

4. જો n યુગ્મ હોય, તો $(a + b)^n$ ના વિસ્તરણનું મધ્યમ પદ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ મું અથવા $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ મું છે. અને જો n અયુગ્મ હોય, તો બે મધ્યમ પદ મળે જે $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અને $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ મું પદ છે.

Brahmagupta's formula

Brahmagupta's most famous result in geometry is his formula for cyclic quadrilaterals. Given the lengths of the sides of any cyclic quadrilateral, Brahmagupta gave an approximate and an exact formula for the figure's area.



The approximate area is the product of the halves of the sums of the sides and opposite sides of a quadrilateral. The accurate [area] is the square root from the product of the halves of the sums of the sides diminished by [each] side of the quadrilateral.

So given the lengths p, q, r and s of a cyclic quadrilateral, the approximate area is $\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$ while, letting $t = \frac{p+q+r+s}{2}$, the exact area is

$$\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$$

Heron's formula is a special case of this formula and it can be derived by setting one of the sides equal to zero.