પ્રકરણ 5

ગુણિત અને ઉપગુણિત સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો

Geometry is not true, it is advantageous.

– *Henri Poincare*

Since the mathematicians have invaded the theory of relativity, I do not understand it myself anymore.

– *Albert Einstein*

5.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણમાં આપણે સરવાળા-સૂત્રોનો ઉપયોગ કરી 2α, 3α વગેરે વાસ્તવિક સંખ્યા α ના **ગુણિતો (Multiples)** અને $\frac{\alpha}{2}$ જેવા α ના **ઉપગુણિત (Submultiples)** માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો માટેનાં સૂત્રો મેળવીશું. ત્યારબાદ આ સૂત્રોના ઉપયોગથી કેટલીક વિશિષ્ટ સંખ્યાઓ માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોની કિંમતો મેળવીશું, તથા છેલ્લે શરતી નિત્યસમોની સાબિતીમાં તેમનો ઉપયોગ જોઈશું.

5.2 2α માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો

(1) $sin2\alpha$ નું સૂત્ર : $\alpha, \beta \in R$ માટે,

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$

આ સૂત્રમાં $\beta = \alpha$ મૂકતાં,

$sin(\alpha + \alpha) = sin\alpha\ cos\alpha + cos\alpha\ sin\alpha$

$\therefore \quad sin2\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha$ (i)

(2) $cos2\alpha$ નું સૂત્ર : $\alpha, \beta \in R$ માટે,

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$

આ સૂત્રમાં $\beta = \alpha$ મૂકતાં,

$cos(\alpha + \alpha) = cos\alpha\ cos\alpha - sin\alpha\ sin\alpha$

$\therefore \quad cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ (ii)

$\therefore \quad cos2\alpha = cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha)$

$\therefore \quad cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$ (iii)

ફરીથી, $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$= 1 - sin^2\alpha - sin^2\alpha$

$\therefore \quad cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ **(iv)**

આમ, $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$

ઉપરના સૂત્રોની મદદથી આપણે કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા α માટે $sin\alpha$ અને $cos\alpha$ નાં મૂલ્યો જાણતા હોઈએ તો વાસ્તવિક સંખ્યા 2α માટે $sin2\alpha$ અને $cos2\alpha$ નાં મૂલ્યો મેળવી શકીએ.

ઉપરનાં સૂત્રો (iii) અને (iv) પરથી આપણને,

$1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$, $1 - cos2\alpha = 2sin^2\alpha$ મળે.

આ સ્વરૂપ ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

હવે આપણે 2α ના સ્થાને α (એટલે α ના સ્થાને $\frac{\alpha}{2}$), મૂકીએ તો

$$sin\alpha = 2sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$cos\alpha = cos^2\frac{\alpha}{2} - sin^2\frac{\alpha}{2}$$

વળી, $1 + cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2}$ અને $1 - cos\alpha = 2sin^2\frac{\alpha}{2}$

(3) $tan\alpha$ ના ઉપયોગથી $sin2\alpha$, $cos2\alpha$ અને $tan2\alpha$ નાં સૂત્રો :

$sin2\alpha = 2sin\alpha \cdot cos\alpha$

$= \frac{2sin\alpha \cdot cos\alpha}{cos^2\alpha + sin^2\alpha}$ **($cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$)**

જો $\alpha \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, તો $cos\alpha \neq 0$. તેથી $cos^2\alpha$ વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં,

$sin2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 + tan^2\alpha}$ **(v)**

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$= \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{cos^2\alpha + sin^2\alpha}$

ફરી, $\alpha \in R - \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$, લેતાં, $cos\alpha \neq 0$. તેથી $cos^2\alpha$ વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં,

$cos2\alpha = \frac{1 - tan^2\alpha}{1 + tan^2\alpha}$ **(vi)**

હવે, α અને 2α બંને tan વિધેયના પ્રદેશમાં હોય તો,

$tan2\alpha = tan(\alpha + \alpha)$

$= \frac{tan\alpha + tan\alpha}{1 - tan\alpha\, tan\alpha}$ $\left(\alpha \in R - \left[\left\{(2k - 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \cup \left\{(2k - 1)\frac{\pi}{4} \mid k \in Z\right\}\right]\right.$

$\therefore \quad tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$ **(vii)**

હવે, ધારો કે α અને 2α બંને cot વિધેયના પ્રદેશમાં છે. તો ઉપર પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય કે,

$cot2\alpha = \frac{cot^2\alpha - 1}{2cot\alpha}$ $\left(\alpha \in R - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in Z\right\}\right)$ **(viii)**

નોંધ : જો $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $\forall k \in Z$, તો સ્પષ્ટ છે કે $\alpha \neq k\pi$ પ્રત્યેક $k \in Z$ કારણ કે $k\pi = \frac{2k\pi}{2}$, $2k \in Z$.

સૂત્રો (v), (vi) અને (vii) માં 2α ને બદલે α (અને α ને બદલે $\frac{\alpha}{2}$) લેતાં,

$$sin\alpha = \frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad cos\alpha = \frac{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}} \text{ અને } tan\alpha = \frac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1-tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

હવે, ઉપર મેળવેલ સૂત્રોમાં $tan\frac{\alpha}{2} = t$ લેતાં,

$$sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ અને } tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

5.3 3α માટે ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં સૂત્રો

(1) $sin3\alpha = sin(2\alpha + \alpha)$

$= sin2\alpha \cdot cos\alpha + cos2\alpha \cdot sin\alpha$

$= (2sin\alpha \cdot cos\alpha) \cdot cos\alpha + (1 - 2sin^2\alpha) \cdot sin\alpha$

$= 2sin\alpha \cdot cos^2\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha$

$= 2sin\alpha\,(1 - sin^2\alpha) + sin\alpha - 2sin^3\alpha$

$= 2sin\alpha - 2sin^3\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha$

$= 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$

$\therefore$ **$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$** **(ix)**

(2) $cos3\alpha = cos(\alpha + 2\alpha)$

$= cos\alpha \cdot cos2\alpha - sin\alpha \cdot sin2\alpha$

$= cos\alpha \cdot (2cos^2\alpha - 1) - sin\alpha\,(2sin\alpha\,cos\alpha)$

$= 2cos^3\alpha - cos\alpha - 2cos\alpha \cdot sin^2\alpha$

$= 2cos^3\alpha - cos\alpha - 2cos\alpha\,(1 - cos^2\alpha)$

$= 2cos^3\alpha - cos\alpha - 2cos\alpha + 2cos^3\alpha$

$= 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$

$\therefore$ **$cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$** **(x)**

(3) $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ એ tan વિધેયનાં પ્રદેશમાં લેતાં,

$\alpha \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq (2k-1)\frac{\pi}{4}$ અને $\alpha \neq (2k-1)\frac{\pi}{6}$, $k \in Z$

આપણે જાણીએ છીએ કે પ્રત્યેક $\frac{\pi}{2}$ નો અયુગ્મ ગુણક એ $\frac{\pi}{6}$નો અયુગ્મ ગુણક પણ છે. દાખલા તરીકે $\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{6}$.

એટલે કે, $\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\} \subset \left\{(2k-1)\frac{\pi}{6} \mid k \in Z\right\}$

$tan3\alpha = tan(2\alpha + \alpha)$

$$= \frac{tan2\alpha + tan\alpha}{1 - tan2\alpha\, tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2tan\,\alpha}{1-tan^2\alpha} + tan\,\alpha}{1 - \frac{2tan\,\alpha}{1-tan^2\alpha} \cdot tan\,\alpha}$$

$$= \frac{2tan\,\alpha + tan\,\alpha - tan^3\alpha}{1 - tan^2\alpha - 2tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}, \ \alpha \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{6}, \ k \in Z\right\}$$

$$\therefore \quad \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}, \ \alpha \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{6}, \ k \in Z\right\} \qquad \text{(xi)}$$

આ સૂત્ર જો 2α એ *tan* વિધેયનાં પ્રદેશમાં હોય તો પણ સત્ય રહે છે.

જો α, 2α અને $3\alpha \in D_{cot}$, લેતાં,

$$\alpha \neq k\pi, \ \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \ \alpha \neq \frac{k\pi}{3}, \ k \in Z$$

$$\{k\pi \mid k \in Z\} \subset \left\{\frac{k\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$$

$\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}, \ \alpha \in R - \left\{\dfrac{k\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$ **પણ આ રીતે સહેલાઈથી મળે.** **(xii)**

પ્રત્યેક, $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ માટે પણ સૂત્ર સત્ય છે.

આમ, કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા α માટે, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ અને $\tan\alpha$ નાં મૂલ્યો પરથી અનુક્રમે $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ અને $\tan 3\alpha$ નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય છે. અને તે જ રીતે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં 4α, 5α,... વગેરે જેવાં મૂલ્યો માટે પણ α નાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયનાં સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો : (1) $\dfrac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan\theta$ (2) $\dfrac{\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2}$

(3) $\dfrac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ (4) $\sec\theta + \tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

ઉકેલ : (1) ડા.બા. $= \dfrac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \tan\theta =$ જ.બા.

(2) ડા.બા. $= \dfrac{\sin\theta + \cos\frac{\theta}{2}}{1 + \sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta}$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} + (1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2} + 1\right)}{\sin\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2} + 1\right)}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} = \text{જ.બા.}$$

(3) ડા.બા. $= \dfrac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}$ $\left(\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right), \ \sin A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\right)$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \text{જ.બા.}$$

(4) ડા.બા. $= sec\theta + tan\theta = \dfrac{1}{cos\theta} + \dfrac{sin\theta}{cos\theta}$

$$= \frac{1+sin\theta}{cos\theta}$$

$$= \frac{1-cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$= \frac{2sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{2sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 2 : $cos4\theta$ નું $cos\theta$ માં બહુપદી તરીકે પદોમાં અને $sin5\theta$ નું $sin\theta$ માં બહુપદી તરીકે પદોમાં વિસ્તરણ કરો.

ઉકેલ : $cos4\theta = cos2(2\theta)$

$$= 2cos^2 2\theta - 1$$

$$= 2(2cos^2\theta - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4cos^4\theta - 4cos^2\theta + 1) - 1$$

$$= 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1$$

$sin5\theta = (sin5\theta + sin\theta) - sin\theta$

$$= 2sin3\theta\ cos2\theta - sin\theta$$

$$= 2(3sin\theta - 4sin^3\theta)(1 - 2sin^2\theta) - sin\theta$$

$$= 6sin\theta - 12sin^3\theta - 8sin^3\theta + 16sin^5\theta - sin\theta$$

$\therefore\ sin5\theta = 16sin^5\theta - 20sin^3\theta + 5sin\theta$

ઉદાહરણ 3 : સાબિત કરો : $cosA \cdot cos(60^\circ - A)\ cos(60^\circ + A) = \frac{1}{4}cos3A$ અને આ પરથી $cos20^\circ \cdot cos40^\circ \cdot cos60^\circ \cdot cos80^\circ$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ડા.બા. $= cosA \cdot cos(60^\circ - A)\ cos(60^\circ + A)$

$$= cosA(cos^2 60^\circ - sin^2A)$$

$$= cosA\left(\frac{1}{4} - sin^2A\right)$$

$$= cosA\left(\frac{1}{4} - (1 - cos^2A)\right)$$

$$= cosA\left(-\frac{3}{4} + cos^2A\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4cos^3A - 3cosA\right) = \frac{1}{4}cos3A = \text{જ.બા.}$$

હવે, $cos20^\circ \cdot cos40^\circ \cdot cos60^\circ \cdot cos80^\circ = \frac{1}{2}(cos20^\circ \cdot cos(60^\circ + 20^\circ)\ cos(60^\circ - 20^\circ)$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}cos3(20^\circ)\right] \qquad \textbf{(A = 20°)}$$

$$= \frac{1}{8}cos60^\circ = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

ઉદાહરણ 4 : સાબિત કરો : $cos^3\theta + cos^3\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) + cos^3\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right) = \frac{3}{4}cos3\theta$

ઉકેલ : $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$. આથી $cos^3\theta = \frac{1}{4}(cos3\theta + 3cos\theta)$

ડા.બા. = $cos^3\theta + cos^3\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) + cos^3\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)$

$$= \frac{1}{4}[cos3\theta + 3cos\theta] + \frac{1}{4}\left[cos(2\pi + 3\theta) + 3cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[cos(4\pi + 3\theta) + 3cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[cos3\theta + 3cos\theta] + \frac{1}{4}\left[cos3\theta + 3cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[cos3\theta + 3cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}cos3\theta + \frac{3}{4}\left[cos\theta + cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) + cos\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}cos3\theta + \frac{3}{4}\left[cos\theta + 2cos(\pi + \theta)\, cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{4}cos3\theta + \frac{3}{4}\left[cos\theta - 2cos\theta \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4}cos3\theta + \frac{3}{4}(cos\theta - cos\theta) = \frac{3}{4}cos3\theta = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 5 : $cosA \cdot cos2A \cdot cos2^2A \cdot cos2^3A \cdot \ldots \cdot cos2^{n-1}A = \frac{sin\,2^nA}{2^n \cdot sinA}$ સાબિત કરો અને તે પરથી $cos\frac{2\pi}{15} \cdot cos\frac{4\pi}{15} \cdot cos\frac{8\pi}{15} \cdot cos\frac{14\pi}{15}$નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $sin2\theta = 2sin\theta\, cos\theta$

$\therefore \quad cos\theta = \frac{sin2\theta}{2sin\,\theta}$

ડા.બા. = $cosA \cdot cos2A \cdot cos2^2A \cdot cos2^3A \cdot \ldots \cdot cos2^{n-1}A$

$$= \frac{sin2A}{2sinA} \cdot \frac{sin2(2A)}{2sin2A} \cdot \frac{sin2(2^2A)}{2sin2^2A} \cdot \frac{sin2(2^3A)}{2sin2^3A} \cdot \ldots \cdot \frac{sin2(2^{n-1}A)}{2sin2^{n-1}A}$$

$$= \frac{sin2(2^{n-1}A)}{2^n \cdot sinA} = \frac{sin\,2^nA}{2^n \cdot sin\,A} = \text{જ.બા.}$$

$$cos\frac{2\pi}{15} \cdot cos\frac{4\pi}{15} \cdot cos\frac{8\pi}{15} \cdot cos\frac{14\pi}{15} = -cos\frac{2\pi}{15} \cdot cos\frac{4\pi}{15} \cdot cos\frac{8\pi}{15} \cdot cos\frac{\pi}{15}$$

$$\left(cos\frac{14\pi}{15} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) = -\,cos\frac{\pi}{15}\right)$$

$$= -\frac{sin\frac{16\pi}{15}}{16sin\frac{\pi}{15}}$$

$$= -\frac{sin\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right)}{16sin\frac{\pi}{15}}$$

$$= \frac{sin\frac{\pi}{15}}{16sin\frac{\pi}{15}} = \frac{1}{16}$$

સ્વાધ્યાય 5.1

સાબિત કરો : **(1 થી 19)**

1. $\frac{sin2\theta}{1-cos2\theta} = cot\theta$

2. $\frac{cos2\theta}{1+sin2\theta} = cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

3. $tan\frac{\theta}{2} + cot\frac{\theta}{2} = 2cosec\theta$

4. $\frac{cos\theta}{1+sin\theta} = tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

5. $\dfrac{1 + sin2\theta + cos2\theta}{1 + sin2\theta - cos2\theta} = cot\theta$

6. $tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = 2sec\theta$

7. $\dfrac{cot\theta - tan\theta}{1 - 2sin^2\theta} = sec\theta \cdot cosec\theta = 2cosec2\theta$

8. $sec2\theta - tan2\theta = tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

9. $\dfrac{sin\,5\theta - 2sin\,3\theta + sin\,\theta}{cos\,5\theta - cos\,\theta} = tan\theta$

10. $\dfrac{sin\theta - sin3\theta}{sin^2\theta - cos^2\theta} = 2sin\theta$

11. $\sqrt{3}cosec20^{\circ} - sec20^{\circ} = 4$

12. $2(cos^8\theta - sin^8\theta) = cos2\theta + cos^3 2\theta$

13. જો $tan\alpha = \frac{1}{3}$ અને $tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$, તો $tan(\alpha + \beta) = 3$.

14. જો $cos\theta = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, તો $cos2\theta = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ અને $cos3\theta = \frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$

15. $\dfrac{sin^2A - sin^2B}{sin2A - sin2B} = \frac{1}{2}tan(A + B)$

16. $\dfrac{sin\,3\theta}{sin\theta} - \dfrac{cos\,3\theta}{cos\theta} = 2$

17. $\dfrac{cos\,3\theta}{cos\theta} + \dfrac{sin\,3\theta}{sin\theta} = 4cos2\theta$

18. $cos^3\theta\, sin3\theta + sin^3\theta\, cos3\theta = \frac{3}{4}sin4\theta$

19. $cos^3\theta\, cos3\theta + sin^3\theta\, sin3\theta = cos^3 2\theta$

20. જો $sinA = \frac{3}{5}$, $0 < A < \frac{\pi}{2}$ તો $sin2A$, $cos2A$, $tan2A$ અને $sin4A$ નાં મૂલ્યો મેળવો.

21. જો $15\theta = \pi$ તો $cos\theta \cdot cos2\theta \cdot cos3\theta \cdot cos4\theta \cdot cos5\theta \cdot cos6\theta \cdot cos7\theta = \frac{1}{128}$ સાબિત કરો.

22. સાબિત કરો કે $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2cos8\theta}}} = 2cos\theta$, જ્યાં $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$

23. સાબિત કરો કે $tan\theta + tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + tan\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) = 3tan3\theta$ અને આ પરથી તારવો કે $tan20^{\circ} + tan80^{\circ} + tan140^{\circ} = 3\sqrt{3}$.

24. સાબિત કરો કે $tan\theta \cdot tan\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \cdot tan\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = tan3\theta$ અને આ પરથી તારવો કે $tan6^{\circ} \cdot tan42^{\circ} \cdot tan66^{\circ} \cdot tan78^{\circ} = 1$.

25. સાબિત કરો : $cos6\theta = 32cos^6\theta - 48cos^4\theta + 18cos^2\theta - 1$.

*

5.4 $\frac{\alpha}{2}$ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યોની $cos\alpha$ નાં મૂલ્યોમાં અભિવ્યક્તિ

(1) $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$ માં 2α ને બદલે α મૂકતાં, (અને α ને બદલે $\frac{\alpha}{2}$ મૂકતાં),

$cos\alpha = 1 - 2sin^2\frac{\alpha}{2}$ મળે.

$\therefore \quad 2sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\alpha$

$\therefore \quad sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$ **(xiii)**

(2) તે જ પ્રમાણે $cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$ માં 2α ને બદલે α (અને α ને બદલે $\frac{\alpha}{2}$) મૂકતાં,

$\therefore \quad 2cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\alpha$

$\therefore \quad cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}$ **(xiv)**

(3) $tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{sin^2\frac{\alpha}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-cos\alpha}{2}}{\frac{1+cos\alpha}{2}}$ **$\alpha \neq (2k-1)\pi;\ k \in Z$**

$\therefore \quad tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}.$ **(xv)**

5.5 વિશિષ્ટ સંખ્યાઓ માટેનાં ત્રિકોણમિતીય વિધેયોનાં મૂલ્યો

(1) $sin18^o$:

ધારો કે $\theta = 18^o$

$\therefore \quad 5\theta = 90^o$

$\therefore \quad 3\theta + 2\theta = 90^o$

$\therefore \quad 2\theta = 90^o - 3\theta$

$\therefore \quad sin2\theta = sin(90^o - 3\theta)$

$\therefore \quad sin2\theta = cos3\theta$

$\therefore \quad 2sin\theta\, cos\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

$\therefore \quad 2sin\theta = 4cos^2\theta - 3$ **$(cos18^o \neq 0)$**

$\therefore \quad 2sin\theta = 4(1 - sin^2\theta) - 3$

$\therefore \quad 2sin\theta = 4 - 4sin^2\theta - 3$

$\therefore \quad 4sin^2\theta + 2sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore \quad sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

અહીં, $\theta = 18^o$ હોવાથી $P(\theta)$ પ્રથમ ચરણમાં છે.

$\therefore \quad sin\theta > 0$

$\therefore \quad sin18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(2) $cos18^o$:

$cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$ માં $\theta = 18^o$ મૂકતાં,

$cos^2 18^o = 1 - sin^2 18^o$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{16 - 5 + 2\sqrt{5} - 1}{16}$$

$\therefore \quad cos^2 18^o = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}$

$\therefore \quad$ **$cos18^o = \sqrt{\dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}}$** **($0 < 18 < 90$ હોવાથી $cos18^o > 0$)**

(3) $cos36^o$:

$cos2\theta = 1 - 2sin^2\theta$ માં $\theta = 18^o$ મૂકતાં,

$$cos36^o = 1 - 2sin^2 18^o$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - 2\left(\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right)$$

$$= \frac{8-5+2\sqrt{5}-1}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$\therefore \quad$ **$cos36^o = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$**

(4) $sin36^o$:

$sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$ માં $\theta = 36^o$ મૂકતાં,

$$sin^2 36^o = 1 - cos^2 36^o$$

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}\right) = \frac{16-6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$\therefore \quad$ **$sin36^o = \sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{16}}$** **($0 < 36 < 90$ હોવાથી $sin36^o > 0$)**

આ જ પ્રમાણે 18ની ગુણિત સંખ્યાઓ 54, 72, 144 વગેરે માટે પણ *sine* અને *cosine* નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય.

$$sin72^o = sin(90^o - 18^o) = cos18^o = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

અને $\quad sin54^o = sin(90^o - 36^o) = cos36^o = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

તે જ રીતે $cos72^o = sin18^o$ અને $cos54^o = sin36^o$.

(5) $sin22\frac{1}{2}^o$ અથવા $sin\frac{\pi}{8}$:

$sin^2\theta = \dfrac{1-cos2\theta}{2}$ માં $\theta = \dfrac{45}{2}^o$ મૂકતાં,

$$sin^2\frac{45}{2}^o = \frac{1-cos\,45^o}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore \quad sin\dfrac{45}{2}^o = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ **($0 < 22\frac{1}{2} < 90$ હોવાથી $sin22\frac{1}{2}^o > 0$)**

(6) તે જ રીતે, $cos22\frac{1}{2}^o = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ મેળવી શકાય.

(7) $tan22\frac{1}{2}^{o}$:

$$tan^2 22\frac{1}{2}^{o} = tan^2\frac{45^{o}}{2} = \frac{1-cos\ 45^{o}}{1+cos\ 45^{o}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}$$

હવે, $0 < 22\frac{1}{2} < 90$ હોવાથી $tan22\frac{1}{2}^{o} > 0$ છે.

$\therefore \quad tan22\frac{1}{2}^{o} = \sqrt{2} - 1$

તે જ રીતે $cot22\frac{1}{2}^{o} = \sqrt{2} + 1$ મળે. આ જ રીતે $67\frac{1}{2}$ માટે *sine* અને *cosine* નાં મૂલ્યો મેળવી શકાય.

$$cos67\frac{1}{2}^{o} = sin22\frac{1}{2}^{o},\ sin67\frac{1}{2}^{o} = cos22\frac{1}{2}^{o} \text{ અને } tan67\frac{1}{2}^{o} = cot22\frac{1}{2}^{o}$$

ઉદાહરણ 6 : જો $cot\theta = \frac{-5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ તો $sin\frac{\theta}{2} + cos\frac{\theta}{2}$નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : અહીં $cot\theta = \frac{-5}{12}$. આથી, $tan\theta = \frac{-12}{5}$.

$\therefore \quad sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$

$\therefore \quad sec\theta = \pm\frac{13}{5}$. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ હોવાથી $sec\theta < 0$

$\therefore \quad sec\theta = -\frac{13}{5}$. આથી $cos\theta = \frac{-5}{13}$

હવે, $sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-cos\ \theta}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{18}{26}$

$\therefore \quad sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{9}{13}$

$sin\frac{\theta}{2} > 0$ કારણ કે $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \quad sin\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+cos\ \theta}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$

$\therefore \quad cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \quad sin\frac{\theta}{2} + cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો : $sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8} + sin^4\frac{5\pi}{8} + sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8} + sin^4\frac{5\pi}{8} + sin^4\frac{7\pi}{8}$

$= sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8} + sin^4\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + sin^4\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$= 2\left(sin^4\frac{\pi}{8} + sin^4\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 2\left[\left(sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(sin^2\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$

$= 2\left[\left(\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-cos\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2\right] \qquad \left(sin^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}\right)$

$$= \frac{2}{4}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right] = \frac{3}{2} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 8 : જો $\sin\alpha + \sin\beta = a$ અને $\cos\alpha + \cos\beta = b$, તો સાબિત કરો કે

(1) $\cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$ (2) $\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$

ઉકેલ : (1) અહીં, $\sin\alpha + \sin\beta = a$ અને $\cos\alpha + \cos\beta = b$

વર્ગ કરીને ઉમેરતાં,

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = a^2 + b^2$$

$$\therefore 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$$

$$\therefore 2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$$

(ii) હવે, $\tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha - \beta)}{1 + \cos(\alpha - \beta)}$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1 - \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}}{1 + \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}}$$

$$\therefore \tan^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$$

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો : $\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta = \frac{1}{128}(3 - 4\cos 4\theta + \cos 8\theta)$

ઉકેલ : $\sin^4\theta \cdot \cos^4\theta = (\sin\theta\cos\theta)^4$

$$= \frac{1}{16}(2\sin\theta\cos\theta)^4$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 2\theta)^4$$

$$= \frac{1}{16}(\sin^2 2\theta)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{64}(1 - 2\cos 4\theta + \cos^2 4\theta)$$

$$= \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4\theta + \frac{1 + \cos 8\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{128}(2 - 4\cos 4\theta + 1 + \cos 8\theta)$$

$$= \frac{1}{128}(3 - 4\cos 4\theta + \cos 8\theta)$$

સ્વાધ્યાય 5.2

1. જો $tanx = \frac{3}{4}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, હોય તો $sin\frac{x}{2}$, $cos\frac{x}{2}$ અને $tan\frac{x}{2}$નાં મૂલ્યો મેળવો.

2. જો $cos\alpha = \frac{3}{5}$, $cos\beta = \frac{5}{13}$, $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ તો $sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ અને $cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$નાં મૂલ્યો મેળવો.

સાબિત કરો : **(3 થી 12)**

3. $cos^6\theta - sin^6\theta = \frac{1}{4}(cos^3 2\theta + 3cos2\theta)$

4. $cos^2A + cos^2\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + cos^2\left(A - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

5. $sin^2A + sin^2\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + sin^2\left(A + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$. પ્રશ્ન 4 પરથી તારવો.

6. $\left(1 + cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + cos\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}$

7. $sin^4\theta \cdot cos^2\theta = \frac{1}{32}[2 - cos2\theta - 2cos4\theta + cos6\theta]$

8. $sin^6\theta = \frac{1}{32}[10 - 15cos2\theta + 6cos4\theta - cos6\theta]$

9. $sin6^\circ \cdot sin42^\circ \cdot sin66^\circ \cdot sin78^\circ = \frac{1}{16}$

10. $cos6^\circ \cdot cos42^\circ \cdot cos66^\circ \cdot cos78^\circ = \frac{1}{16}$

11. $16cos\frac{2\pi}{15} \cdot cos\frac{4\pi}{15} \cdot cos\frac{8\pi}{15} \cdot cos\frac{14\pi}{15} = 1$

12. $\left(1 + cos\frac{\pi}{10}\right)\left(1 + cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(1 + cos\frac{7\pi}{10}\right)\left(1 + cos\frac{9\pi}{10}\right) = \frac{1}{16}$

*

5.6 શરતી નિત્યસમો

અહીં આપણે કેટલીક શરતોને આધીન મળતાં નિત્યસમો વિશે વિચારીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, $sin2A + sin2B + sin2C = 4sinA\ sinB\ sinC$ એ $A + B + C = \pi$ હોય એવી A, B અને Cની કોઈ પણ કિંમતો માટે સત્ય છે એવું સાબિત કરી શકાય. પરંતુ તે માટે $A + B + C = \pi$ થાય તેવી જ A, B અને C ની કિંમતો લેવી તે શરત છે. આવા નિત્યસમને શરતી નિત્યસમ કહેવાય છે. જ્યારે $sin^2A + cos^2A = 1$ એ Aની પ્રત્યેક વાસ્તવિક કિંમત માટે સત્ય છે. આથી આવાં વિધાનોને નિત્યસમો કહે છે.

મુખ્યત્વે ત્રિકોણના ખૂણાઓને સાંકળતા સંબંધો આ પ્રકારના શરતી નિત્યસમો છે.

$A + B + C = \pi$

$\therefore$ $A + B = \pi - C$ અને $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$\therefore$ $sin(A + B) = sin(\pi - C)$ અને $sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

$\therefore$ $sin(A + B) = sinC$ અને $sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = cos\frac{C}{2}$

તે જ રીતે,

$cos(A + B) = -cosC$ અને $cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = sin\frac{C}{2}$

ઉદાહરણ 10 : જો A + B + C = π હોય તો સાબિત કરો કે,

$sin2A + sin2B + sin2C = 4sinA\ sinB\ sinC$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= sin2A + sin2B + sin2C$

$= 2sin(A + B)\ cos(A - B) + 2sinC \cdot cosC$

$= 2sin(\pi - C)\ cos(A - B) + 2sinC \cdot cosC$ $\quad (A + B + C = \pi)$

$= 2sinC \cdot cos(A - B) + 2sinC \cdot cosC$

$= 2sinC\ [cos(A - B) + cosC]$

$= 2sinC\ [cos(A - B) - cos(A + B)]$ $\quad (A + B + C = \pi)$

$= 2sinC\ [-2sinA \cdot sin(-B)]$

$= 4sinA\ sinB\ sinC$ $\quad (sin(-B) = -sinB)$

= જ.બા.

ઉદાહરણ 11 : જો A + B + C = $\frac{\pi}{2}$ હોય તો સાબિત કરો કે,

$cos^2A + cos^2B + cos^2C = 2[1 + sinA\ sinB\ sinC]$.

ઉકેલ : ડા.બા. $= cos^2A + cos^2B + cos^2C$

$= \frac{1 + cos2A}{2} + \frac{1 + cos2B}{2} + \frac{1 + cos2C}{2}$

$= \frac{1}{2}[3 + cos2A + cos2B + cos2C]$

$= \frac{1}{2}[3 + 2cos(A + B)\ cos(A - B) + 1 - 2sin^2C]$

$= \frac{1}{2}[4 + 2cos(A + B) \cdot cos(A - B) - 2sin^2C]$

$= 2 + cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cdot cos(A - B) - sin^2C$ $\quad \left(A + B = \frac{\pi}{2} - C\right)$

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - sinC]$ $\quad \left(cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = sinC\right)$

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - cos(A + B)]$

$= 2 + sinC\ [-2sinA \cdot sin(-B)]$

$= 2 + 2sinA\ sinB\ sinC = 2\ [1 + sinA\ sinB\ sinC]$

અથવા બીજી રીત

ડા.બા. $= cos^2A + cos^2B + cos^2C$

$= cos^2A + 1 - sin^2B + 1 - sin^2C$

$= 2 + (cos^2A - sin^2B) - sin^2C$

$= 2 + cos(A + B)\ cos(A - B) - sin^2C$

$= 2 + cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) \cdot cos(A - B) - sin^2C$

$= 2 + sinC \cdot cos(A - B) - sin^2C$

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - sinC]$

$= 2 + sinC\ [cos(A - B) - cos(A + B)]$

$= 2 + sinC\ [-2sinA \cdot sin(-B)]$

$= 2\ [1 + sinA\ sinB\ sinC]$ = જ.બા.

સ્વાધ્યાય 5.3

1. જો $A + B + C = \pi$, તો સાબિત કરો :

(1) $cos2A + cos2B + cos2C = -1 - 4cosA\ cosB\ cosC$

(2) $sinA + sinB + sinC = 4cos\frac{A}{2}\ cos\frac{B}{2}\ cos\frac{C}{2}$

(3) $cosA + cosB + cosC = 1 + 4sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2}$

(4) $sin^2A + sin^2B + sin^2C = 2(1 + cosA\ cosB\ cosC)$

(5) $cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1 - 2cosA\ cosB\ cosC$

(6) $sin^2\frac{A}{2} + sin^2\frac{B}{2} + sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2}$

(7) $cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2} = 2\left(1 + sin\frac{A}{2}\ sin\frac{B}{2}\ sin\frac{C}{2}\right)$

(8) $sin^2A + sin^2B - sin^2C = 2sinA\ sinB\ cosC$

2. જો $A + B + C = \frac{\pi}{2}$, તો સાબિત કરો :

(1) $sin^2A + sin^2B + sin^2C = 1 - 2sinA\ sinB\ sinC$

(2) $sin2A + sin2B + sin2C = 4cosA\ cosB\ cosC$

(3) $sin^2A - sin^2B + sin^2C = 1 - 2cosA\ sinB\ cosC$

*

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો : $tan142\frac{1}{2}^o = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.

ઉકેલ : $tan142\frac{1}{2}^o = tan\left(90^o + 52\frac{1}{2}^o\right)$

$$= -cot52\frac{1}{2}^o$$

$$= -cot\left(45^o + 7\frac{1}{2}^o\right)$$

$$= -\frac{cot7\frac{1}{7}^o - 1}{cot7\frac{1}{7}^o + 1}$$

$$= -\frac{cos\frac{7^o}{2} - sin\,7\frac{1}{2}^o}{cos\,7\frac{1}{2}^o + sin\,7\frac{1}{2}^o}$$

$$= -\frac{cos\,7\frac{1}{2}^o - sin\,7\frac{1}{2}^o}{cos\,7\frac{1}{2}^o + sin\,7\frac{1}{2}^o} \times \frac{cos\,7\frac{1}{2}^o - sin\,7\frac{1}{2}^o}{cos\,7\frac{1}{2}^o - sin\,7\frac{1}{2}^o}$$

$$= -\frac{\left(cos\,7\frac{1}{2}^o - sin\,7\frac{1}{2}^o\right)^2}{cos^2 7\frac{1}{2}^o - sin^2 7\frac{1}{2}^o}$$

$$= -\frac{1 - 2sin\,7\frac{1}{2}^o \times cos\,7\frac{1}{2}^o}{cos^2 7\frac{1}{2}^o - sin^2 7\frac{1}{2}^o}$$

$$= -\frac{1 - \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= -\frac{1 - \sin(45^\circ - 30^\circ)}{\cos(45^\circ - 30^\circ)}$$

$$= -\frac{1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}+1} = -\frac{(2\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3}+1)}\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}$$

$$= -\frac{(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 3 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$= -\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} = \text{જ.બા.}$$

ઉદાહરણ 13 : જો $A + B + C = \pi$, તો સાબિત કરો કે,

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$$

ઉકેલ : જ.બા. $= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{B+C}{4}\right)\sin\left(\frac{A+C}{4}\right)\sin\left(\frac{A+B}{4}\right) \qquad \mathbf{(A + B + C = \pi)}$$

$$= 1 + 2\left(2\sin\left(\frac{B+C}{4}\right)\sin\left(\frac{A+C}{4}\right)\right)\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \cos\left(\frac{A+B+2C}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi + C}{4}\right)$$

$$= 1 + \left(\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

$$= \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \text{ડા.બા.}$$

ઉદાહરણ 14 : જો α અને β સમીકરણ $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ નાં બીજ હોય તો સાબિત કરો કે, $\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} = \frac{2b}{a+c}$ અને આ પરથી તારવો કે, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{b}{a}$.

ઉકેલ : $a\cos\theta + b\sin\theta = c$

$$\therefore \quad a\left(\frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}\right) + b\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}\right) = c$$

$$\therefore \quad a - a\tan^2\frac{\theta}{2} + 2b\tan\frac{\theta}{2} = c + c\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad (a + c)\tan^2\frac{\theta}{2} - 2b\tan\frac{\theta}{2} + (c - a) = 0$$

આ $tan\frac{\theta}{2}$ માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે અને $tan\frac{\alpha}{2}$ અને $tan\frac{\beta}{2}$ તેનાં બીજ છે.

$\therefore \quad tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2} = -\left(\frac{-2b}{a+c}\right) = \frac{2b}{a+c}$ અને $tan\frac{\alpha}{2} \cdot tan\frac{\beta}{2} = \frac{c-a}{c+a}$

હવે, $tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \dfrac{tan\frac{\alpha}{2} + tan\frac{\beta}{2}}{1 - tan\frac{\alpha}{2}\, tan\frac{\beta}{2}}$

$$= \frac{\frac{2b}{a+c}}{1 - \frac{c-a}{c+a}} = \frac{2b}{a+c-c+a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

ઉદાહરણ 15 : ગણિતીય અનુમાનથી સાબિત કરો કે,

$cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosn\theta = sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1.$

ઉકેલ : ધારો કે

$P(n)$: $cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosn\theta = sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1$

$n = 1$ માટે, ડા.બા. $= cos\theta$, જ.બા. $= sin\theta \cdot cos\frac{\theta}{2} \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1$

$$= \frac{sin\theta \cdot cos\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= \frac{2sin\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2} \cdot cos\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} - 1$$

$$= 2cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$= cos\theta$ = જ.બા. $\qquad (cos2\theta = 2cos^2\theta - 1)$

$\therefore$ $P(1)$ સત્ય છે.

ધારો કે $P(k)$ સત્ય છે.

$\therefore \quad cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosk\theta = sin(k+1)\frac{\theta}{2} \cdot cos\left(\frac{k\theta}{2}\right) \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1.$

$n = k + 1$ લેતાં,

ડા.બા. $= cos\theta + cos2\theta + cos3\theta + ... + cosk\theta + cos(k+1)\theta$

$$= \frac{sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\theta \cdot cos\frac{k\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}} - 1 + cos(k+1)\theta$$

$$= \frac{1}{2sin\frac{\theta}{2}}\left(2sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\theta\ cos\frac{k\theta}{2} + 2sin\frac{\theta}{2} \cdot cos(k+1)\theta\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2sin\frac{\theta}{2}}\left[sin\left(\frac{(2k+1)\theta}{2}\right) + sin\frac{\theta}{2} + sin\left(\frac{(2k+3)\theta}{2}\right) - sin\left(\frac{(2k+1)\theta}{2}\right)\right] - 1$$

$$= \frac{1}{sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{2}\left(sin\frac{(2k+3)\theta}{2} + sin\frac{\theta}{2}\right)\right] - 1$$

$$= \frac{1}{sin\frac{\theta}{2}}\left[\frac{1}{2} \cdot 2sin\frac{(k+2)\theta}{2} \cdot cos\frac{(k+1)\theta}{2}\right] - 1$$

$$= sin\frac{(k+2)\theta}{2} \cdot cos\frac{(k+1)\theta}{2} \cdot cosec\frac{\theta}{2} - 1$$

$\therefore$ P(k + 1) સત્ય છે.

$\therefore$ P(k) સત્ય છે. $\Rightarrow$ P(k + 1) સત્ય છે.

ગણિતીય અનુમાનના સિદ્ધાંત પ્રમાણે P(n) પ્રત્યેક $n \in$ N માટે સત્ય છે.

સ્વાધ્યાય 5

સાબિત કરો : **(1 થી 15)**

1. $tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = sec\theta + tan\theta$

2. $\frac{cot\ \theta + cosec\ \theta - 1}{cot\ \theta - cosec\ \theta + 1} = cot\frac{\theta}{2}$

3. $tan\alpha = \sqrt{5}\,tan\beta \Rightarrow cos2\alpha = \frac{3cos2\beta - 2}{3 - 2cos2\beta}$

4. $tan\frac{\alpha}{2} = cos\theta \Rightarrow sin\alpha = \frac{1 - tan^4\frac{\theta}{2}}{1 + tan^4\frac{\theta}{2}}$

5. જો $sin\theta = a$, તો $a(1 + x^2) = 2x$ નાં બીજ $tan\frac{\theta}{2}$ અને $cot\frac{\theta}{2}$ છે.

6. જો $cos\theta = a$, તો $4x^2 - 4x + 1 = a^2$ નાં બીજ $cos^2\frac{\theta}{2}$ અને $sin^2\frac{\theta}{2}$ છે.

7. જો α અને β સમીકરણ $acos\theta + bsin\theta = c$ નાં બીજ હોય, તો

(1) $cos\alpha + cos\beta = \frac{2ac}{a^2 + b^2}$ અને $cos\alpha \cdot cos\beta = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

(2) $tan\alpha + tan\beta = \frac{-2ab}{b^2 - c^2}$ અને $tan\alpha \cdot tan\beta = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}$

(3) $sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

8. $cos^5\theta = \frac{1}{16}[10cos\theta + 5cos3\theta + cos5\theta]$

9. $(2cos\theta + 1)(2cos\theta - 1)(2cos2\theta - 1)(2cos4\theta - 1) = 2cos8\theta + 1$

10. $cosec\theta + cosec2\theta + cosec4\theta + cot4\theta = cot\frac{\theta}{2}$

11. $(cos^2 48^\circ - sin^2 12^\circ) - (cos^2 66^\circ - sin^2 6^\circ) = \frac{1}{4}$

12. $\frac{sec\,8\theta - 1}{sec\,4\theta - 1} = \frac{tan\,8\theta}{tan\,2\theta}$

13. $cot\frac{\pi}{24} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$

14. $tan\frac{\pi}{16} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - (\sqrt{2} + 1)$

15. $4sin27^\circ = \sqrt{5 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$

16. જો $x = sin\theta + cos\theta \cdot sin2\theta$ અને $y = cos\theta + sin\theta \cdot sin2\theta$ તો

સાબિત કરો કે, $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2$

17. જો $A + B + C = \pi$, સાબિત કરો કે,

(1) $sin(B + 2C) + sin(C + 2A) + sin(A + 2B) = 4sin\left(\frac{B - C}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{C - A}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{A - B}{2}\right)$

(2) $cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2} = 4cos\left(\frac{\pi - A}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi - B}{4}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$.

18. જો ΔABC કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો સાબિત કરો કે,

$cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1 \Leftrightarrow sin^2A + sin^2B + sin^2C = 2$.

ગણિતીય અનુમાનનાં સિદ્ધાંતથી નીચેનાં પરિણામો સાબિત કરો : **(19 થી 22)**

19. $sinx + sin3x + sin5x + ... + sin(2n - 1)x = \frac{sin^2nx}{sinx}$.

20. $\frac{1}{2}tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}tan\frac{x}{4} + ... + \frac{1}{2^n}\,tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\,cot\,\frac{x}{2^n} - cotx$

21. $sin\theta + sin2\theta + ... + sinn\theta = sin\frac{(n+1)\theta}{2} \cdot sin\frac{n\theta}{2} \cdot cosec\frac{\theta}{2}$

22. $cos\alpha \cdot cos2\alpha \cdot cos4\alpha \cdot ... \cdot cos2^{n-1}\alpha = \frac{sin^n2\alpha}{2^n \cdot sin\alpha}$

23. નીચે આપેલું દરેક વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલા વિકલ્પો (a), (b), (c) અથવા (d) માંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરીને ☐ માં લખો :

(1) $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$નું એક બીજ ...... છે. ☐

(a) $sin70^o$ (b) $sin10^o$ (c) $sin20^o$ (d) $cos70^o$

(2) $cos^4\theta - sin^4\theta$ નો વિસ્તાર ...... છે. ☐

(a) $[0, 1]$ (b) $[-1, 1]$ (c) $(0, 1)$ (d) $(-1, 1)$

(3) $sec^4\theta + cosec^4\theta$ નો વિસ્તાર ...... છે. ☐

(a) $[1, \infty)$ (b) R^+ (c) $[8, \infty)$ (d) $R - (-1, 1)$

(4) $cos67\frac{1}{2}^o$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ (c) $\sqrt{2} - 1$ (d) $\sqrt{2} + 1$

(5) $3sin\frac{\pi}{9} - 4sin^3\frac{\pi}{9}$ નું મૂલ્ય ...... છે. ☐

(a) $\frac{1}{2}$ (b) -1 (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

(6) જો $sin\theta = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, તો $P(2\theta)$ નું ચરણ ...... છે. ☐

(a) પહેલું (b) બીજું (c) ત્રીજું (d) ચોથું

(7) $6x - 8x^3 = \sqrt{3}$નું એક બીજ ...... છે. ☐

(a) $sin20^o$ (b) $sin30^o$ (c) $sin10^o$ (d) $cos10^o$

(8) જો α એ સમીકરણ $25cos^2\theta + 5cos\theta - 12 = 0$નું બીજ હોય, તો, $sin2\alpha$ શોધો. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

(a) $\frac{-24}{25}$ (b) $\frac{-13}{18}$ (c) $\frac{13}{18}$ (d) $\frac{24}{25}$

(9) $\frac{sin\,3\theta}{1+2cos\,2\theta}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-sin\theta$ (b) $-cos\theta$ (c) $cos\theta$ (d) $sin\theta$

(10) $\left(\frac{1+sin\theta-cos\theta}{1+sin\theta+cos\theta}\right)^2$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $tan^2\frac{\theta}{2}$ (b) $2cot\frac{\theta}{2}$ (c) $cot^2\frac{\theta}{2}$ (d) $2cosec\frac{\theta}{2}$

(11) $12sin40^\circ - 16sin^340^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $-3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $-2\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{2}$

(12) જો $sin\alpha = \frac{-3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, તો $cos\frac{\alpha}{2}$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{10}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

(13) જો $\frac{1+cosA}{1-cosA} = \frac{m^2}{n^2}$, તો $tanA = ...$

(a) $\pm\frac{2mn}{m^2-n^2}$ (b) $\pm\frac{2mn}{m^2+n^2}$ (c) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (d) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

(14) $cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right) = ...$

(a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$

(15) જો $cos\alpha = -0.6$ અને $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, તો $tan\frac{\alpha}{4} = ...$

(a) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(16) જો $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ અને $2x \cdot sin^2\frac{\theta}{2} + 1 = x$, તો $tan\theta$ ...... છે.

(a) $\sqrt{x^2-1}$ (b) $\sqrt{x^2+1}$ (c) $\sqrt{x^2-2}$ (d) $\sqrt{x^2-\frac{1}{2}}$

(17) જો $tanx = \frac{b}{a}$, તો $acos2x + bsin2x$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $a - b$ (b) a (c) b (d) $a + b$

(18) $cos6^\circ \cdot sin24^\circ \cdot cos72^\circ$ નું મૂલ્ય ...... છે.

(a) $\frac{-1}{8}$ (b) $\frac{-1}{4}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{4}$

(19) $sin^6\theta + cos^6\theta$ નું મહત્તમ મૂલ્ય ...... છે.

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{8}$ (d) $\frac{13}{8}$

(20) જો $cos A = \frac{3}{4}$, તો $32 sin\frac{A}{2}\ sin\frac{5A}{2}$નું મૂલ્ય ...... છે. $\square$

(a) -11 (b) $-\sqrt{11}$ (c) $\sqrt{11}$ (d) 11

*

સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેનાં મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. $sin2\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha$
2. $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$
3. $1 + cos2\alpha = 2cos^2\alpha$ અને $1 - cos2\alpha = 2sin$®$^2\alpha$
4. $sin2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1+tan^2\alpha}$
5. $cos2\alpha = \frac{1-tan^2\alpha}{1+tan^2\alpha}$
6. $tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \left[\left\{(2k-1)\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(2k-1)\frac{\pi}{4}\right\}\right]\ k \in Z$
7. $cot2\alpha = \frac{cot^2\alpha - 1}{2cot\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$
8. $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$
9. $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$
10. $tan3\alpha = \frac{3tan\alpha - tan^3\alpha}{1-3tan^2\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \left\{(2k-1)\frac{\pi}{6},\ k \in Z\right\}$
11. $cot3\alpha = \frac{cot^3\alpha - 3cot\alpha}{3cot^2\alpha - 1}$ $\quad \alpha \in R - \left\{\frac{k\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$
12. $sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}$
13. $cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}$
14. $tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$ $\quad \alpha \in R - \left\{(2k-1)\pi \mid k \in Z\right\}$
15. $sin18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $cos18^\circ = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$
16. $sin36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$, $cos36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
17. $sin22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $cos22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $tan22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} - 1$