This Question Paper contains 16 Printed Pages.
(Part- A & Part-B)

Sl. No.

પ્રશ્ન પેપરનો સેટ નંબર Set No. of Question Paper
8

050(G)

(MARCH, 2015)

Part-A : Time : 1 Hour / Marks : 50
Part-B : Time : 2 Hours / Marks : 50

PART - A

Time : 1 Hour] ***[Maximum Marks : 50***

સૂચનાઓ :

1. આ પ્રશ્નપત્રનાં વિભાગ-**A** માં બહુ વિકલ્પ પ્રકારના (M.C.Q.) **50** પ્રશ્નો છે. બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

2. પ્રશ્નોની ક્રમ સંખ્યા **1** થી **50** છે અને દરેક પ્રશ્નનો ગુણ **1** છે.

3. કાળજીપૂર્વક દરેક પ્રશ્નનો અભ્યાસ કરી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરવો.

4. આપને અલગથી આપેલ **OMR** પત્રકમાં જે તે પ્રશ્ન નંબર સામે (A) ○, (B) ○, (C) ○ અને (D) ○ આપેલા છે. તે પ્રશ્નનો જે જવાબ સાચો હોય તેના વિકલ્પ પરના વર્તુળને પેનથી પૂર્ણ ઘટ્ટ ● કરવાનું રહેશે.

5. પ્રશ્નપત્રનાં ઉપરની જમણી બાજુના આપેલા પ્રશ્નપત્રક સેટ નંબર ને **OMR** પત્રકમાં આપેલી જગ્યામાં લખવાનું રહેશે.

6. રફ કાર્ય હેતુ આ ટેસ્ટ બુકલેટમાં આપેલી જગ્યા પર કરવાનું રહેશે.

7. વિદ્યાર્થીઓ જરૂર જણાય ત્યાં સાદા કેલ્કયુલેટરનો ઉપયોગ કરી શકશે.

1. $|\bar{x}|=|\bar{y}|=1$ અને $|\bar{x}, \hat{\bar{y}}|=\theta$,

તો $|\bar{x}-\bar{y}\cos\theta|=$ .....

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin^2\theta$

(C) $\sin\frac{\theta}{2}$ (D) $\sin\theta$

2. $\bar{x}=(1, k, 3)$ અને $\bar{y}=(2,-1, 5)$ એ પરસ્પર લંબસદિશો હોય,

તો $k=$ .....

(A) 10 (B) 15

(C) 13 (D) 17

3. $|\bar{x}|=2, |\bar{y}|=3, |\bar{z}|=5$ તથા $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=\bar{0}$,

તો $\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{y}\cdot\bar{z}+\bar{z}\cdot\bar{x}=$ .....

(A) -19 (B) -38

(C) 0 (D) 19

4. α, β, γ એ સદિશ $\bar{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ હોય,

તો $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=$ .....

(A) 2 (B) -1

(C) 0 (D) 1

5. (3, 4) ને લંબ એકમ સદિશ ..... છે.

(A) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (B) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

(C) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

6. $|(\cos\theta\sin\alpha, \cos\alpha, -\sin\theta\sin\alpha)|=$ .....

(A) 0 (B) -1

(C) 2 (D) 1

7. $\int_1^3 \log x \, dx = ...$

(A) $-2 + \log 9$ (B) $2 + \log 27$

(C) $\log\left(\frac{27}{e}\right)$ (D) $-2 + \log 27$

8. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin x \, dx = ...$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$

(C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

9. સંકલનની મદદથી વક્ર $y = x$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 1$ તથા $x = 10$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) 99 (B) $\frac{99}{2}$

(C) 50 (D) 100

10. વક્ર $y = 5 \sin x$; $0 \le x \le \pi/2$, X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) 1 (B) $\frac{5}{2}$

(C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

11. વક્રો $y = x^2$ તથા $y = x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

12. ગોલકના ઘનફળનો તેના પૃષ્ઠફળ S ને સાપેક્ષ વૃદ્ધિ દર ..... થાય.

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(B) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(C) $4\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(D) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

13. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી કુલ આવક

$R(x) = 10x^2 + 20x + 1500$ દ્વારા મળે છે.

$x = 2015$ હોય, ત્યારે સીમાંત આવક ..... થાય.

(A) 40320 (B) 403

(C) 40300 (D) 4032

14. $\cos^{-1}(-0.49)$ નું આસન્ન મૂલ્ય ..... છે.

(A) $\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$

(B) $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$

(C) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{50\sqrt{3}}$

(D) $\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{50\sqrt{3}}$

15. જો $y = f(x) = \sin x$ હોય, તો તેનો વિકલ dy = ...,

જ્યાં $x = \pi/6$, $dx = 0.01$ છે.

(A) $\sqrt{3}$ (0.05)

(B) $\sqrt{3}$ (0.5)

(C) $\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{3}$ (0.005)

16. $\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx$ = ... (જ્યાં $a, b \in R^+$)

(A) $\frac{1}{2}\log ab$

(B) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$

(C) $2\log\left(\frac{b}{a}\right)$

(D) $\frac{1}{2}\log(ab)\log\left(\frac{b}{a}\right)$

17. $\int_0^1 x(1-x)^{11}\,dx$ = ...

(A) $\frac{1}{156}$ (B) $\frac{1}{121}$

(C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{132}$

18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$ = ...

(A) $\pi/2$ (B) 0

(C) $-\pi/4$ (D) $\pi/4$

19. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$ = ...

(A) $\frac{25\pi}{4}$ (B) $\pi/4$

(C) $\frac{25}{4}$ (D) 25π

20. $f(x) = x^{3/5}(4-x)$, $x \in R^+ \cup \{0\}$ ની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ ..... છે.

(A) $0, \frac{3}{2}$

(B) $0, \frac{2}{3}$

(C) $0, -\frac{2}{3}$

(D) $0, -\frac{3}{2}$

21. પદાર્થકણની ગતિનું સમીકરણ $s = t^3 - 6t^2 - 15t$ છે. s મીટરમાં તથા t સેકન્ડમાં છે. તો પદાર્થકણ સ્થિર થાય, ત્યારે $t =$ .....

(A) 1

(B) 5, 1

(C) 0

(D) 5

22. $(at^2, 2at)$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો સ્પર્શક ..... આગળ X- અક્ષને લંબ છે. $t \in R$.

(A) $(a, 2a)$

(B) $(0, 0)$

(C) $(a, -2a)$

(D) $(4a, 4a)$

23. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ પરના $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ ..... છે.

(A) $y = 1$

(B) $x = 0$

(C) $x = y$

(D) $2x + y = 0$

24. $\int \sqrt{1+\sin\frac{x}{4}}\,dx = \ldots\ldots + c$

(A) $\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}$

(B) $\frac{1}{8}\left(\sin\frac{x}{8}-\cos\frac{x}{8}\right)$

(C) $8\left(\sin\frac{x}{8}-\cos\frac{x}{8}\right)$

(D) $8\left(\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}\right)$

25. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \ldots\ldots + c$

(A) $x\tan x$

(B) $x\tan\frac{x}{2}$

(C) $\frac{x}{2}\tan x$

(D) $\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}$

26. $\int_0^{\pi/4} \tan^{100} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{102} x\,dx = \ldots.$

(A) $\frac{1}{102}$

(B) $\frac{1}{100}$

(C) 101

(D) $\frac{1}{101}$

27. $x + y + z = 1$ નું $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = P$ સ્વરૂપ ..... છે.

(A) $\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 1$

(C) $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $x + y + z = 1$

28. યામાક્ષો સાથે એકરૂપ ખૂણા બનાવતી અને $(2, -3, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ ..... થાય. $(k \in R)$

(A) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(B) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(C) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k(-1, 1, 1)$

(D) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k(1, 1, 1)$

29. $\bar{r}\cdot(1, 2, -1) = 3$ અને $2x - y + 2z = 2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ .....

(A) $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{9}$ (B) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{6}}{9}$

(C) $\pi - \cos^{-1}\frac{\sqrt{6}}{9}$ (D) $\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$

30. જે રેખાઓની દિક્ સંખ્યાઓ l, m, n અને $m-n, n-l, l-m$ હોય, તેવી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ..... છે.

(A) $\pi/6$ (B) $\pi/2$

(C) $\pi/3$ (D) $\pi/4$

31. $\int \frac{e^{5\log x} - e^{3\log x}}{e^{4\log x} - e^{2\log x}}\, dx = \ldots\ldots + c$

(A) $e^3 \log x$

(B) $\frac{x^3}{3}$

(C) $\frac{x^2}{2}$

(D) $e^2 \log x$

32. $\int e^x \left\{\frac{1+(1+x^2)\tan^{-1}x}{1+x^2}\right\} dx = \ldots\ldots + c$

(A) $\frac{x}{1+x^2}$

(B) $e^x \tan^{-1} x$

(C) $\frac{e^x}{1+x^2}$

(D) $x \tan^{-1} x$

33. $\int e^{7x+\log x}\, dx = \ldots\ldots + c$

(A) $\frac{e^{7x}}{49}(7x-1)$

(B) $\frac{e^x}{49}(7x-1)$

(C) e^{7x}

(D) $e^{7x}(7x-1)$

34. X - અંત:ખંડ 4, Y - અંત:ખંડ (– 6), Z - અંત:ખંડ 3 બનાવતા સમતલનું સમીકરણ ..... છે.

(A) $3x - 2y + 4z = 12$

(B) $4x - 6y + 3z = 1$

(C) $4x - 3y + 2z = 12$

(D) $3x - 4y + 6z = 12$

35. સમતલ $2x - z + 1 = 0$ નું સદિશ સમીકરણ ..... છે.

(A) $\bar{r} \cdot (2, -1, 0) + 1 = 0$

(B) $\bar{r} \cdot (2, 0, -1) + 1 = 0$

(C) $\bar{r} \cdot (2, 0, -1) = 1$

(D) $\bar{r} \cdot (2, -1, 0) = 1$

36. $(2, 2, -3)$ અને $(1, 3, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ ..... છે.

(A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

(B) $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{8}$

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{-3}$

(D) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

37. ઊગમબિંદુ થી સમતલ $\bar{r} \cdot (3, 4, 12) = 65$ નું લંબ અંતર ..... છે.

(A) 5

(B) 13

(C) 65

(D) 1

38. વક્રના કોઈ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ અને તે બિંદુના y - યામનો ગુણાકાર એ બિંદુના x - યામ જેટલો હોય, તો તે વક્ર ..... દર્શાવે છે.

(A) પરવલય

(B) ઉપવલય

(C) લંબાતિવલય

(D) વર્તુળ

39. અતિવલય $x^2 - y^2 = 8$ પરના બિંદુ (3, 1) આગળના અવાભિલંબની લંબાઈ ..... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 8

(C) $\frac{1}{8}$ (D) 3

40. એક શહેરની વસ્તીનો વધારો પ્રતિવર્ષ 4% છે, જો t સમયમાં શહેરની વસ્તી p હોય, તો p નું t નાં સ્વરૂપમાં સમીકરણ ..... છે.

(A) $p = 4 \cdot e^{\frac{t}{25}}$ (B) $p = c \cdot e^{\frac{t}{25}}$

(C) $p = \frac{1}{25} e^{4t}$ (D) $p = e^{\frac{t}{25}}$

41. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$, $y(0) = 1$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ..... છે.

(A) $x^2 = \frac{1}{y^2}$ (B) $y = x^2 + \log x$

(C) $4e^x + \frac{1}{y^2} = 8$ (D) $y = \left(2x^2 + 1\right) = 1$

42. સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે $[2\bar{x} + 3\bar{y} \quad \bar{x} \quad \bar{y}] =$ .....

(A) $6(\bar{x} \times \bar{y})$ (B) $6\,|\bar{x}|^2$

(C) 1 (D) 0

43. ઉપવલય $x^2 + 4y^2 = 1$ થી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) π (B) 2π

(C) 4π (D) $\pi/2$

44. વક્ર $y^2 = 2x$, Y-અક્ષ અને રેખા $y = 2$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{9}{2}$

(C) 8 (D) $\frac{8}{3}$

45. વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \sin y + 3x$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ..... છે.

(A) 2, 3

(B) 3, વ્યાખ્યાયિત નથી.

(C) વ્યાખ્યાયિત નથી, 2

(D) 3, 2

46. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $\sec x$ (B) $\cos x$

(C) $\cot x$ (D) $\sin x$

47. તૃતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં આવતાં, સ્વૈર અચળોની સંખ્યા ..... છે.

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 0

48. $\int \left(x^6+7x^5+6x^4+5x^3+4x^2+3x+1\right) e^x \, dx = \ldots. + c$

(A) $\sum_{i=1}^{6} x^i e^x$

(B) $\sum_{i=0}^{6} i \, e^x$

(C) $\sum_{i=0}^{6} (ex)^i$

(D) $\sum_{i=1}^{7} x^i e^x$

49. $\int (1-\cos x)\,\text{cosec}^2 x \; dx = \ldots\ldots\ldots\ldots + c$

(A) $\cot\left(\frac{x}{2}\right)$

(B) $\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(C) $2\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(D) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

50. $\int \frac{\cot x \; dx}{\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}} = \ldots\ldots. + c$

(A) $-\frac{1}{2}\log\left|\cot^2 x+\sqrt{\cot^4 x+1}\right|$

(B) $\frac{1}{2}\log\left|\tan^2 x+\sqrt{\tan^4 x+1}\right|$

(C) $-\frac{1}{2}\log\left|\cot x+\sqrt{\cot^4 x+1}\right|$

(D) $\frac{1}{2}\log\left|\cot^2 x+\sqrt{\cot^4 x+1}\right|$

050(G)

(MARCH, 2015)

PART - B

Time : 2 Hours] ***[Maximum Marks : 50***

સૂચનાઓ :

1. સ્પષ્ટ વંચાય તેવું હસ્તલેખન જાળવવું.
2. આ પ્રશ્નપત્રનાં વિભાગ-**B** માં ત્રણ વિભાગ છે અને કુલ **1** થી **18** પ્રશ્નો આપેલા છે.
3. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. આંતરિક વિકલ્પો આપેલા છે.
4. પ્રશ્નની જમણી બાજુના અંક તેના ગુણ દર્શાવે છે.
5. નવો વિભાગ નવા પાના પર લખવો.
6. પ્રશ્નોના જવાબ ક્રમમાં લખવા.
7. વિદ્યાર્થીઓ જરૂર જણાય ત્યાં સાદા કેલ્કયુલેટરનો ઉપયોગ કરી શકશે.

વિભાગ - A

● નીચે આપેલ **1** થી **8** પ્રશ્નોના જવાબો માંગ્યા મુજબ આપો. દરેક પ્રશ્નના **2** ગુણ છે. **16**

1. $f(x) = 6x + 3\cot x$ ના મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો, જ્યાં $x \in (0, \pi)$.
2. $xy + ax + by = 2$ પરનાં $(1, 1)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ 5 છે, તો a અને b મેળવો.
3. $\int x\sqrt{x^4+64}\,dx$ મેળવો.
4. $\int \frac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1+e^{-x}}}\,dx$ મેળવો.
5. વક્ર $y = x^2 - 3x + 2$ નું X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

   અથવા

   પરવલય $y = x^2 + 2$ તથા રેખાઓ $y = x$, $x = 3$ અને $x = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. એકમ સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે સાબિત કરો કે $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left|\bar{x}+\bar{y}\right|$, જ્યાં $\left(\bar{x}, \hat{\ }\bar{y}\right) = \alpha$.
7. $(a_1, 1, 1)$, $(1, a_2, 1)$, $(1, 1, a_3)$ સમતલીય સદિશો હોય, તો સાબિત કરો કે $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1-a_i} = 1$.
8. રેખા $x = 3z + 2$, $y = 2 - 5z$ ની દિક્કોસાઈન શોધો.

   અથવા

   સાબિત કરો કે $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ તથા $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

વિભાગ - B

● નીચેના **9** થી **14** સુધીના પ્રશ્નોના માગ્યા મુજબ જવાબ આપો. દરેક પ્રશ્નનાં **3** ગુણ છે. **18**

9. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_a^b \sin x \, dx$ મેળવો.

અથવા

કિંમત મેળવો : $\int_{-1}^{2} |2x-1| \, dx$

10. બે વર્તુળો $x^2 + y^2 = 1$ અને $(x-1)^2 + y^2 = 1$ વડે આવૃત્ત સામાન્ય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

11. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$ નો ઉકેલ મેળવો.

અથવા

પ્રારંભિક શરત $y(e) = 0$ ને આધીન વિકલ સમીકરણ $x \cdot e^{y/x} - y + x\frac{dy}{dx} = 0$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

12. સદિશની મદદથી સાબિત કરો કે $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

13. જો કોઈ રેખા સમઘનના વિકર્ણો સાથે $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ માપના ખૂણા બનાવે,

તો સાબિત કરો કે $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$.

14. બિંદુ $(1, 5, 1)$ નું સમતલ $x - 2y + z + 5 = 0$ ની સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ મેળવો.

વિભાગ - C

● નીચેના **15** થી **18** સુધીના પ્રશ્નોના માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો. દરેક પ્રશ્નનાં **4** ગુણ છે. **16**

15. પાણીની એક ટાંકી ઊંધા શંકુ આકારની છે. તેના પાયાની ત્રિજ્યા 8 મીટર તથા ઊંચાઈ 12 મીટર છે. ટાંકીને સફાઈ માટે 4 મી^{3} / મિનિટ નાં દરથી ખાલી કરવામાં આવી રહી છે. જ્યારે પાણીની ઊંડાઈ 6 મીટર હોય, ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો.

16. $\int e^{4x} \sin 8x \cos x \, dx$ મેળવો.

અથવા

$\int \frac{(3x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \, dx$ મેળવો.

17. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right) dx$ ની કિંમત મેળવો.

18. એક ઓરડામાં મૃતદેહનું તાપમાન 100° F છે. 5 મિનિટ બાદ મૃતદેહનું તાપમાન 50° F થાય છે. ત્યારબાદ બીજી 5 મિનિટ પછી તેનું તાપમાન 40° F થાય છે, તો તેના આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન શોધો.

SUBJECT:	50		MEDIUM:	G

QUE	ANS	QUE	ANS	QUE	ANS
1	D	21	D	41	X
2	D	22	B	42	D
3	A	23	C	43	D
4	B	24	C	44	A
5	B	25	B	45	A
6	D	26	D	46	B
7	D	27	C	47	D
8	A	28	D	48	A
9	B	29	D	49	D
10	D	30	B	50	A
11	D	31	C		
12	B	32	B		
13	A	33	A		
14	A	34	A		
15	D	35	B		
16	D	36	D		
17	A	37	A		
18	B	38	C		
19	A	39	D		
20	A	40	B		

વિભાગ A

(1)

$f(x) = 6x + 3\cot x$

$f'(x) = 6 - 3\operatorname{cosec}^2 x$

$f''(x) = 0 - 3(2\operatorname{cosec} x)(-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x)$

$= 6\operatorname{cosec}^2 x \cdot \cot x$

$f(x)$ ના સ્થાનિક મહત્તમ કે ન્યૂનતમ મેળવવા $f'(x) = 0$ લેતાં

$6 - 3\operatorname{cosec}^2 x = 0$

$3\operatorname{cosec}^2 x = 6$

$\operatorname{cosec}^2 x = 2$

$\operatorname{cosec} x = \pm\sqrt{2}$

પરંતુ $\operatorname{cosec} x \neq -\sqrt{2}$ કારણ કે $x \in (0, \pi)$ માટે,

$\operatorname{cosec} x > 1$ થાય.

$\operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$

$x = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{3\pi}{4}$

હવે પ્રથમ કસોટી $f''(x)$ નો ઉપયોગ કરો.

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}$

$= 6(2)(+1)$

$= +12 > 0$

આથી $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ એ સ્થાનિક ન્યૂનતમ મૂલ્ય છે.

વિભાગ.....A.....

$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\,\mathrm{cosec}^2\frac{3\pi}{4}\cot\frac{3\pi}{4}$$
$$= 6(\sqrt{2})^2(-1)$$
$$= -6\times 2$$
$$= -12 < 0$$

આથી $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ એ સ્થાનીય મહત્તમ કિંમત છે.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\cot\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{3\pi}{2} + 3$$
$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 3\cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{9\pi}{2} - 3$$

આથી સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $x = \frac{3\pi}{4}$ આગળ મળે.

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{9\pi}{2} - 3$$

સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય $x = \frac{\pi}{4}$ આગળ મળે.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} + 3$$

(2) $xy + ax + by = 2$

$$x\frac{dy}{dx} + y + a + b\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(a+y)}{(x+b)}$$

પરંતુ આ વક્ર પરના (1, 1) આગળનો ઢાળ 5 છે.
આ કિંમત ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$5 = -\frac{(a+1)}{(1+b)}$$

વિભાગ A

$5 + 5b = -a - 1$

$a + 5b + 6 = 0 \longrightarrow$ (i)

ઉપરાંત આ વક્ર (1,1) બિંદુ માંથી પસાર થાય છે.

આથી વક્રનું સમીકરણ તેનું સમાધાન કરશે.

$(1)(1) + a(1) + b(1) = 2$

$a + b = 1 \longrightarrow$ (ii)

~~$a + 5b + 6 = 0$~~

સમી. (i) પરથી, $a + 5b + 6 = 0$

સમી. (ii) પરથી, $a + b - 1 = 0$

$- \quad - \quad +$

$4b + 7 = 0$

$b = -\frac{7}{4}$ કિંમત (ii) માં મૂકતાં,

$a - \frac{7}{4} = 1$

$a = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$

આમ, $a = \frac{11}{4}$ $b = -\frac{7}{4}$ મળે.

(3) $I = \int x\sqrt{x^4 + 64}\, dx \longrightarrow$ (i)

$x^2 = t$ આદેશ લેતાં,

$2x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{dt}{2}$ કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$I = \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2 + 64}\, dt$

વિભાગ.....A.....

પ્રશ્ન ક્રમાંક 6

$$I = \int \frac{1}{2}\sqrt{t^2+64}\,.\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+64} + \frac{64}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+64}\right|\right] + C$$

$$I = \frac{x^2}{4}\sqrt{x^4+64} + 16\log\left|x^2+\sqrt{x^4+64}\right| + C$$

($t = x^2$ કિંમત મૂકતાં)

(4)

$$I = \int \frac{(e^x-1)}{(e^x+1)\sqrt{e^x+1+e^{-x}}}\,dx$$

$$= \int \frac{(e^x-1)}{(e^x+1)\sqrt{e^x+1+\frac{1}{e^x}}}\,dx$$

$$= \int \frac{(e^x-1)e^x\,dx}{(e^x+1)\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$$

$e^x = t$ મૂકતાં,

$e^x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{(t-1)\,dt}{(t+1)\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \int \frac{(t+1-2)\,dt}{(t+1)\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} - 2\int \frac{dt}{(t+1)\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}}}$$

વિભાગ.....A.....

7

પ્રશ્ન ક્રમાંક

(4) $I = \int \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})}{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})\sqrt{(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2 - 1}}\,dx$ (અંશ અને છેદને $e^{\frac{x}{2}}$ વડે ભાગતાં)

$e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} = t$ આદેશ દેતાં,

$\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})dx = dt$ $\quad (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})dx = 2dt$

$I = 2\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$

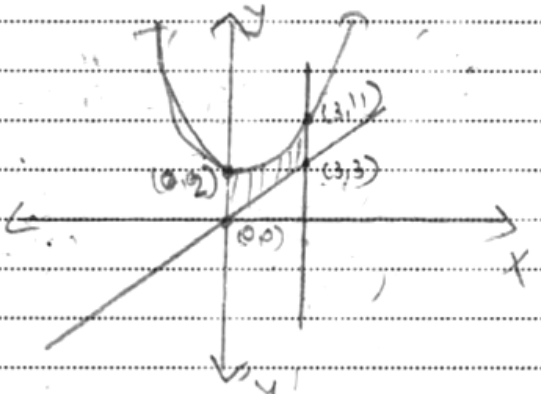
$= 2\sec^{-1}(t) + C$

$\boxed{I = 2\sec^{-1}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}) + C}$

(5) ધક $y = x^2 - 3x + 2$

$= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}$

$y + \frac{1}{4} = (x - \frac{3}{2})^2$



(5) $y = x^2 + 2$

રેખા $y = x$

અહીં માગેલ પ્રદેશ આકૃતિમાં દર્શાવ્યો છે.

માગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| - |I_2|$

જ્યાં $I_1 = \int_0^3 x^2 + 2\,dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3$

$= \frac{(3)^3}{3} + 2(3) - 0$

$= 9 + 6 = 15$ એકમ

વિભાગ.....A.....

8

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$$I_2 = \int_0^3 x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{(3)^2}{2} - 0$$

$$I_2 = \frac{9}{2}$$

આથી માગેલ સદેશનું ક્ષેત્રફળ $A = |I_1| - |I_2|$

$$= 15 - \frac{9}{2}$$

$$= \frac{21}{2}$$

આથી માગેલ આપૂર્ણ સદેશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{21}{2}$ એકમ છે.

(6) અહીં $|\bar{x}| = |\bar{y}| = 1$

$$|\bar{x}+\bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + 2\bar{x}\cdot\bar{y}$$

$$= (1)^2 + (1)^2 + 2|\bar{x}||\bar{y}|\cos\alpha$$

(જ્યાં $\alpha = (\bar{x}\,\hat{,}\,\bar{y})$)

$$= 1 + 1 + 2(1)(1)\cos\alpha$$

$$= 2 + 2\cos\alpha$$

$$= 2(1+\cos\alpha)$$

$$|\bar{x}+\bar{y}|^2 = 2\times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}|\bar{x}+\bar{y}|^2$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}|\bar{x}+\bar{y}|}$$

(અહીં $\alpha \in (0,\pi)$

$\frac{\alpha}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$

~~આથી~~ ઉપરોક્ત $|\bar{x}+\bar{y}| \geq 0$ થાય.

વિભાગ.....A.....

9

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}|\bar{x}+\bar{y}|}$

(7) ધારો કે $A(a_1,1,1)$ $B(1,a_2,1)$ $C(1,1,a_3)$ સમતલીય સદિશો છે.

$$\therefore = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{થાય.}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-1 & 0 & 1-a_3 \\ 0 & a_2-1 & 1-a_3 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_{31}(-1),\ R_{32}(-1) \text{ કરતાં})$$

$$= (a_1-1)[(a_2-1)a_3 - (1-a_3)] + (1-a_3)[0-(a_2-1)] = 0$$

$$\cancel{(1-a_1)[a_3(1-a_2)} -$$

$$a_3(a_1-1)(a_2-1) - (a_1-1)(1-a_3) - (1-a_3)(a_2-1) = 0$$

અહીં $a_1 \neq 1$ $a_2 \neq 1$ $a_3 \neq 1$ હોવાથી ઉપરના સમીકરણને $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) \neq 0$ વડે ભાગતાં,

$$= \frac{a_3(1-a_1)(1-a_2) + (1-a_3)(1-a_1) + (1-a_3)(1-a_2)}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)} = 0$$

$$= \frac{a_3}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 0$$

$$\frac{a_3}{1-a_3} + 1 + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 1 \quad (\text{બંને બાજુ ઉમેરતાં})$$

$$\frac{a_3+1-a_3}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 1$$

વિભાગ.....A.....

10

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$$= \frac{1}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1-a_i} = 1}$$

(8) રેખા l $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ માટે

$\bar{a} = (1,-1,1)$ $\bar{l} = (3,2,5)$

બીજી રેખા m $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ માટે,

$\bar{b} = (-2,1,-1)$ $\bar{m} = (4,3,-2)$

$\bar{l} \times \bar{m} = (3,2,5) \times (4,3,-2)$

$= (-19, 26, 1)$

$\bar{b} - \bar{a} = (-2,1,-1) - (1,-1,1)$

$= (-3, 2, -2)$

$(\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{l} \times \bar{m}) = (-19, 26, 1) \cdot (-3, 2, -2)$

$= 57 + 52 - 2$

$= 107 \neq 0$

આથી આપેલ બંને રેખાઓ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

વિભાગ B

11

પ્રશ્ન ક્રમાંક

(9) $I = f(x) = \int_a^b \sin x \cdot dx$

અહીં આપેલ વિધેય $f(x) = \int_a^b \sin x\, dx$ એ $x \in [a,b]$ માં સતત છે. આથી આ અંતરાલને n જેટલા ઉપઅંતરાલમાં વિભાજિત કરતાં દરેક ઉપઅંતરાલની લંબાઈ $h = \frac{b-a}{n}$ થાય.

અહીં જો $n \to \infty$ હોય તો $h \to 0$ થાય.

$$\therefore I = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$$

(અહીં $a = a$ અને $b = b$ છે.
$f(a+ih) = \sin(a+ih)$ થાય)

$$I = \lim_{h \to 0} h \sum_{i=1}^{n} \sin(a+ih)$$

$$= \lim_{h \to 0} h \left[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin(a+nh) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} h \left[\frac{\cos(a+\frac{h}{2}) - \cos(a+nh+\frac{h}{2})}{2\sin\frac{h}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\cos(a+\frac{h}{2}) - \cos(a+b-a+\frac{h}{2})}{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}$$

($nh = b-a$ મૂકતાં)

$$= \frac{\lim_{h \to 0} \cos(a+\frac{h}{2}) - \cos(b+\frac{h}{2})}{\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}$$

વિભાગ..... B

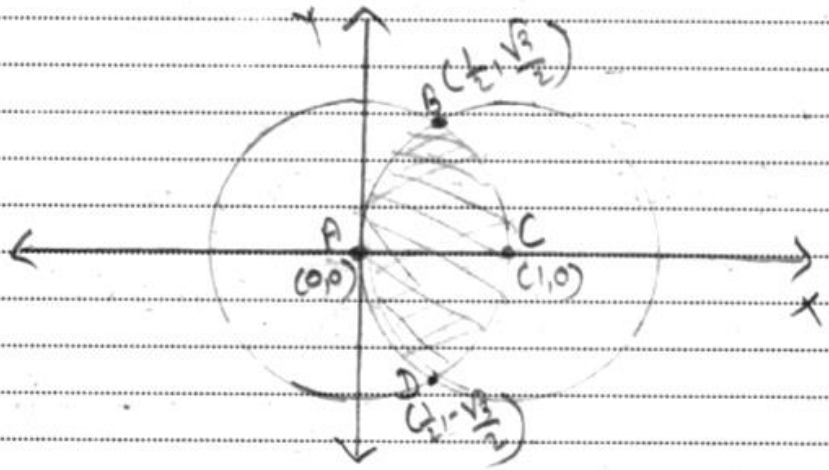
12

$= \cos a - \cos b$

$\therefore I = \cos a - \cos b$

10 વર્તુળ :- 1 $x^2 + y^2 = 1$ ——→ (i)

વર્તુળ :- 2 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ——→ (ii)



આમ (i) અને (ii) માંથી y^2 ની કિંમત

મેળવતાં,

$x^2 = (x-1)^2$

$x^2 = x^2 - 2x + 1$

$x = \frac{1}{2}$ આ કિંમત (i) માં મૂકતાં,

$\frac{1}{4} + y^2 = 1$

$y^2 = \frac{3}{4}$

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

વિભાગ B

13

પ્રશ્ન ક્રમાંક

આમ, આપેલ બંને વર્તુળોના છેદનબિંદુ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ તથા $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ છે. આથી માગેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ આકૃતિમાં છાંયેલ છે.
અહીં આ બંને વક્રો y અક્ષ પ્રત્યે સંમિત હોવાથી માગેલ પ્રદેશનું ક્ષે. $A = 2(|I_1| + |I_2|)$

જ્યાં $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx$ (અહીં $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{1-(x-1)^2}$ પરંતુ આપાગે પ્રથમ સરસમાં હોવાથી, $y > 0$ થાય.)

$$= \left[\frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{1}\right)\right]_0^{1/2}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}-1}{1}\right)\right] - \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-1} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right]$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(-1)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} + 0 + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \cancel{\frac{8-\sqrt{3}}{8}} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$I_2 = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$ (અહીં $x^2 + y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ પરંતુ પ્રથમ સરસમાં $y > 0$, $y = \sqrt{1-x^2}$)

વિભાગ B

14

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$$I_2 = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-1} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(1) - \left[\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right] - \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

આથી માત્રેલ પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ

$$A = 2\left(|I_1| - |I_2|\right)$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\boxed{A = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ એકમ}}$$

(11) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) \longrightarrow (1)$

$x+y = t$ આદેશ લેતાં,

$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$ (x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$ કિંમત (1) માં મૂકતાં,

$\therefore \frac{dt}{dx} - 1 = \sin t$

વિભાગ B

15

$$\frac{dt}{dx} = 1+\sin t$$

$$\frac{dt}{1+\sin t} = dx$$ જે વિયોજનીય ચલ પ્રકારનું છે.

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dt}{1+\sin t} = \int dx$$

$$\cancel{I_1 = \int dx}$$

જ્યાં $I_1 = \int \frac{dt}{1+\sin t}$

$\tan\frac{t}{2} = h$ આદેશ લેતાં,

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\,dt = dh$$

$$dt = \frac{2dh}{1+h^2}$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{2dh}{1+h^2}}{1+\frac{2h}{1+h^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dh}{1+h^2+2h}$$

$$= 2\int \frac{dh}{(h+1)^2}$$

$$= -\frac{2}{h+1} + C$$

$$= -\frac{2}{\tan\frac{t}{2}+1}$$

વિભાગ B

16

$$\int \frac{dt}{1+\sin t} = \int dx$$

$$= \int \frac{(1-\sin t)}{1-\sin^2 t}\,dt = \int dx$$

$$\int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int dx$$

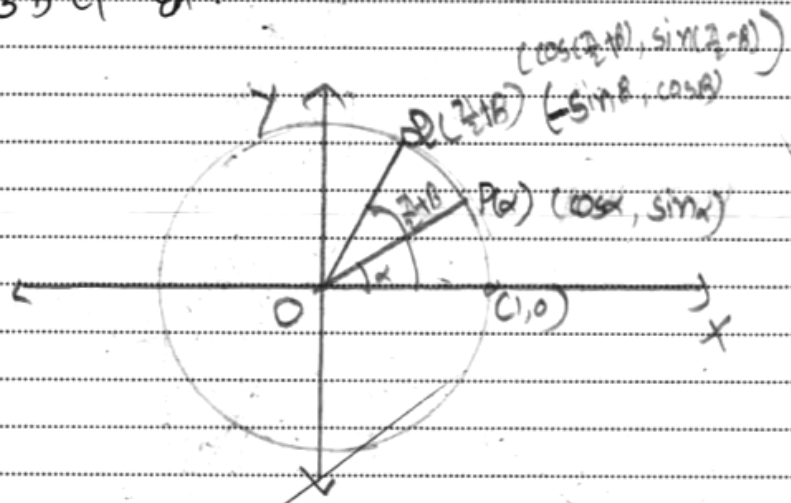
$$\int \sec^2 t\,dt - \int \tan t \cdot \sec t\,dt = \int dx$$

$$\tan t - \sec t = x + C$$

$$\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + C \quad (t = x+y \text{ મૂકતાં})$$

જો માત્રે ત વિકલ સમી કરણનો ચાપક ઉકેલ છે.

(12)



→ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ એકમ વર્તુળ પર બે બિંદુ અને $P(\alpha)$ અને $Q(\frac{\pi}{2}+\beta)$ દર્શાવ્યા છે. અહીં

$$P(\alpha) = \vec{OP} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

વિભાગ B

17

$Q\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \vec{OQ} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)$

$= (-\sin\beta, \cos\beta)$

→ આકૃતિ પરથી $\vec{OP}$ અને $\vec{OQ}$ વચ્ચેનો ખૂણો,

$(\vec{OP} \wedge \vec{OQ}) = \frac{\pi}{2}+\beta-\alpha$

$= \frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)$ છે.

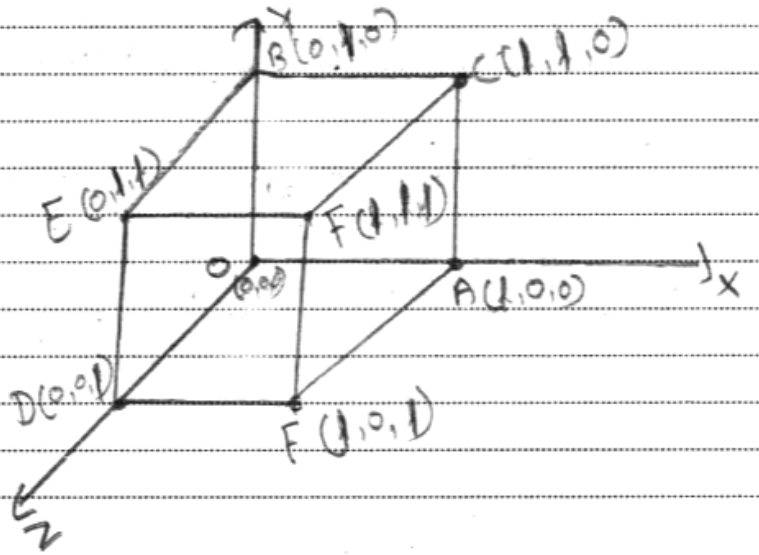
$\cos(\vec{OP} \wedge \vec{OQ}) = \frac{\vec{OP}\cdot\vec{OQ}}{|\vec{OP}||\vec{OQ}|}$

$= \frac{(\cos\alpha, \sin\alpha)\cdot(-\sin\beta, \cos\beta)}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\ \sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right) = -\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta}{(1)(1)}$

$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

13



વિભાગ B

18

આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 1 એકમ લંબાઈનો સમઘન દર્શાવ્યો છે.
ધારો કે કોઈ એક રેખા કે જેની દિક્કોસાઈન $\bar{l}(l, m, n)$ છે તે આ સમઘનના વિકર્ણો સાથે α, β, γ અને δ ખૂણો આંતરે છે. $l^2+m^2+n^2=1$ છે.

આકૃતિ પરથી,

$\vec{OF} = (1,1,1)$ $\vec{BF} = (1,-1,1)$

$\vec{DC} = (1,1,-1)$ $\vec{AE} = (-1,1,1)$ જે ચાર વિકર્ણો છે.

અને આ રેખા તેની સાથે અનુક્રમ α, β, γ અને δ ખૂણો આંતરે છે.

$$\cos(\vec{OF}, \bar{l}) = \frac{|\vec{OF} \cdot \bar{l}|}{|\vec{OF}||\bar{l}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|(1,1,1)\cdot(l,m,n)|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{|l+m+n)}{\sqrt{3}}$$

તેવી જ રીતે $\cos\beta = \frac{|l-m+n)}{\sqrt{3}}$

$\cos\gamma = \frac{|l+m-n)}{\sqrt{3}}$ $\cos\delta = \frac{|-l+m+n|}{\sqrt{3}}$ છે.

વિભાગ.....B.....

19

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$

$= \frac{|l+m+n|^2}{3} + \frac{|l-m+n|^2}{3} + \frac{|-l+m+n|^2}{3} + \frac{|l+m-n|^2}{3}$

$= \frac{1}{3}\left[4(l^2+m^2+n^2) + 0\right]$

$= \frac{4}{3} \quad (l^2+m^2+n^2=1)$

(14) બિંદુ $A(1,5,1)$ છે.
સમતલ પર નું ધારો કે કોઈ બિંદુ $B(a,b,c)$ છે.
જે A થી સમતલ $x-2y+z+5=0$ પર નો
લંબપાદ છો. જ્યાં $\bar{n} = (1,-2,1)$ છે.
આથી $\vec{AB}$ ની દિશા અને સમતલના અભિલંબની
દિશા સમાન થશે.

$\vec{AB} = (a,b,c) - (1,5,1)$

$= (a-1, b-5, c-1)$

$\vec{AB} = k\bar{n}$ જ્યાં $k \in R - \{0\}$

$\vec{AB} = k(1,-2,1)$

$(a-1, b-5, c-1) = (k, -2k, k)$

અનુરૂપ યામ સરખાવતાં,

$a = k+1, \quad b = 5-2k \quad c = k+1$

ઉપરોક્ત આ બિંદુ (a,b,c) એ સમતલ પર
પણ આવેલું છે. આથી તે તેનું સમાધાન
કરશે.

વિભાગ B

20

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$k+1-2(5-2k)+k+1+5=0$

$k+1-10+4k+k+1+5=0$

$6k=3$

$k=\frac{1}{2}$ આમ, ઉત્તરપદના.

પામ, $B(a,b,c)$

$=(k+1,\ 5-2k,\ k+1)$

$=(\frac{1}{2}+1,\ 5-2(\frac{1}{2}),\ 1+\frac{1}{2})$

$=(\frac{3}{2},\ 4,\ \frac{3}{2})$ છે.

ધારો કે $(1,5,1)$ બિંદુનું આપેલ સમતલની સાપેક્ષ પ્રતિબિંદુ $D(x,y,z)$ છે.

અથી, આ ઉત્તરપદ એ $\overline{AD}$ નું મધ્યબિંદુ થશે.

$(\frac{3}{2},4,\frac{3}{2})=(\frac{x+1}{2},\frac{5+y}{2},\frac{z+1}{2})$

અનુરૂપ ઘટકો સરખાવતાં,

$\frac{3}{2}=\frac{x+1}{2}$ $\quad 4=\frac{5+y}{2}$ $\quad \frac{3}{2}=\frac{z+1}{2}$

$x=2$ $\quad y=3$ $\quad z=2$

આથી આપેલ સમતલને સાપેક્ષ બિંદુ $(1,5,1)$ નું પ્રતિબિંબ $(2,3,2)$ છે.

વિભાગ C

21

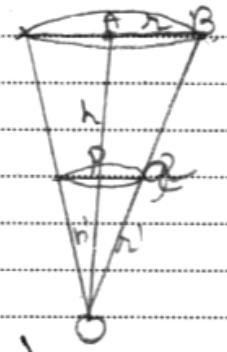
પ્રશ્ન ક્રમાંક

(15) $r = 8\,m \quad h = 12\,m$

$\frac{dV}{dt} = 4\ m^3/$મિનિટ

$h' = 6\,m$ ધારો કે t સમયે પાણીની ઊંચાઈ h' અને ત્રિજ્યા r' છે.

આકૃતિ પરથી, ΔAOB અને ΔPOQ એ સમરૂપ ચિકોણો છે.



$$\therefore \frac{AO}{PO} = \frac{AB}{PQ}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{r}{r'}$$

$$\frac{h'}{r'} = \frac{h}{r} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$h' = \frac{3}{2} \cdot r' \longrightarrow (i)$$

આથી શંકુનું ઘનફળ

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h'$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{3}h'\right)^2 h' \quad (\text{સમી. (i) પરથી})$$

$$V = \frac{\pi}{3}\,\frac{4}{9}\,h'^3$$

$$V = \frac{4\pi}{27}\,h'^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{27}\,3h'^2\,\frac{dh'}{dt}$$

$$-4 = \frac{4\pi}{9}(6)^2 \cdot \frac{dh'}{dt}$$

$$\frac{dh'}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\ m/\text{મિનિટ}$$

વિભાગ C

22

આમ, ઊંચાઈ ઘટવાનો દર $= \frac{1}{4\pi}$ મી/મિનિટ

(16) $I = \int e^{4x} \sin 8x \cdot \cos x \, dx$

$= \frac{1}{2} \int e^{4x} (2\sin 8x \cos x) \, dx$

$= \frac{1}{2} \int e^{4x} [\sin(8x+x) + \sin(8x-x)] \, dx$

$= \frac{1}{2} \int e^{4x} [\sin 9x + \sin 7x] \, dx$

$= \frac{1}{2} \left[\int e^{4x} \sin 9x \, dx + \int e^{4x} \sin 7x \, dx \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{4x}}{(4)^2+(9)^2} [4\sin 9x - 9\cos 9x] + \frac{e^{4x}}{(4)^2+(7)^2} [4\sin 7x - 7\cos 7x] \right] + C$

$= \frac{e^{4x}}{2} \left[\frac{1}{97} [4\sin 9x - 9\cos 9x] + \frac{1}{65} [4\sin 7x - 7\cos 7x] \right] + C$

(17) $I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right) dx$

$= \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{(1-x)+(x)}{1-x(1-x)}\right) dx$

અહીં $x \in (0,1)$ હોવાથી

$0 < x < 1 \longrightarrow (1)$

વિભાગ.....C.....

23

$-1 < -x < 0$ (-1 થી ઓછી ઋણસંખ્યા)

$0 < 1-x < 1$ (1 થી ઓછી ધનસંખ્યા) ⟶ (ii)

હવે (i) અને (ii) પરથી,

$0 < x(1-x) < 1$ મળશે.

$\therefore \tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ જ્યાં $xy < 1$ મળશે,

$\tan^{-1}\left(\frac{(1-x)+x}{1-x(1-x)}\right) = \tan^{-1}(1-x) + \tan^{-1}x$ મળશે

$$I = \int_0^1 \left(\tan^{-1}(1-x) + \tan^{-1}x\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-(1-x))\,dx$$

$$\left[\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \text{ મળશે}\right]$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx + \int_1^0 \tan^{-1}x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$$

$$= 2\left[\tan^{-1}x \int dx - \int\left(\frac{d}{dx}\tan^{-1}x \cdot \int dx\right)dx\right]_0^1$$

$$= 2\left[x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\right]_0^1$$

$$= 2\left[x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$= 2\left[1\tan^{-1}(1) - \frac{1}{2}\log(1+1^2)\right] -$$

$$2\left[0 - \frac{1}{2}\log(1)\right]$$

વિભાગ.....C.....

24

$I = 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right]$

$\boxed{I = \frac{\pi}{2} - \log 2}$

(18) ન્યૂટનનો ઠંડકનો નિયમ પરથી,

$T - S \propto -T$

$T - S \propto -kT$ જ્યાં k એ અચળાંક છે.

જ્યાં $k > 0$

$\frac{dT}{dt} \propto -(T-S)$

$\frac{dT}{dt} = -k(T-S)$ જ્યાં k એ અચળાંક છે

$k > 0$ છે.

T એ પદાર્થનું તાપમાન છે. તથા S એ આજુબાજુના પરિસરનું તાપમાન છે.

$\frac{dT}{T-S} = -k \cdot dt$

$\int \frac{dT}{T-S} = -k \cdot dt$

$\log(T-S) = -kt + \log C$ (જ્યાં C એ અચળ અચળાંક છે.)

$\log(T-S) - \log C = -kt$

$\log\left(\frac{T-S}{C}\right) = -kt$

$T - S = Ce^{-kt}$ ——→ (1)

Supplementary/પુરવણી

04 - (S)M - 14

વિષય	Maths
તારીખ	16/03/2015

★ અહીંથી જ લખવાનું શરૂ કરવું ★

વિભાગ.....C.....

$t = 0$ સમયે $T = 100^\circ F$ છે.

આપેલ સૂત્ર (i) માં મૂકતાં,

$100 - S = Ce^{-k(0)}$

$C = 100 - S$ ——→ (ii)

$T - S = (100 - S)e^{-kt}$ ——→ (iii)

$t = 5$ સમયે $T = 50^\circ F$ છે.

આપેલ સૂત્ર (ii) માં મૂકતાં,

$50 - S = (100 - S)e^{-k(5)}$ ——→ (iv)

$t = 10$ સમયે $T = 40^\circ F$ છે. આપેલ સૂત્ર (iii) માં મૂકતાં,

$40 - S = (100 - S)e^{-10k}$ ——→ (v)

વિભાગ C

2

પ્રશ્ન ક્રમાંક

સમી. (iv) અને (v) પરથી,

$$\cancel{\frac{50-S}{100-S} = \left(\frac{40-S}{100-S}\right)^2}$$

તથા સમી. (iv) નો વર્ગ કરીને e^{-10x} ની કિંમતો સરખાવતાં,

$$\left(\frac{50-S}{100-S}\right)^2 = \frac{40-S}{100-S}$$

$$(50-S)^2 = (40-S)(100-S)$$

$$2500-100S+\cancel{S^2} = 4000-40S-100S+\cancel{S^2}$$

$$2500 = 4000-40S$$

$$40S = 1500$$

$$\boxed{S = 37.5\,F^\circ}$$

આમ, આસપાસના પરિસરની અસલ તાપમાન $37.5^\circ F$ છે.