This Question Paper contains 16 Printed Pages.
(Part- A & Part-B)

Sl. No.

પ્રશ્ન પેપરનો સેટ નંબર Set No. of Question Paper
8

050(G)

(MARCH, 2015)

Part-A : Time : 1 Hour / Marks : 50
Part-B : Time : 2 Hours / Marks : 50

PART - A

Time : 1 Hour] ***[Maximum Marks : 50***

સૂચનાઓ :

1. આ પ્રશ્નપત્રનાં વિભાગ-**A** માં બહુ વિકલ્પ પ્રકારના (M.C.Q.) **50** પ્રશ્નો છે. બધા જ પ્રશ્નો ફરજીયાત છે.

2. પ્રશ્નોની ક્રમ સંખ્યા **1** થી **50** છે અને દરેક પ્રશ્નનો ગુણ **1** છે.

3. કાળજીપૂર્વક દરેક પ્રશ્નનો અભ્યાસ કરી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરવો.

4. આપને અલગથી આપેલ **OMR** પત્રકમાં જે તે પ્રશ્ન નંબર સામે (A) ○, (B) ○, (C) ○ અને (D) ○ આપેલા છે. તે પ્રશ્નનો જે જવાબ સાચો હોય તેના વિકલ્પ પરના વર્તુળને પેનથી પૂર્ણ ઘટ્ટ ● કરવાનું રહેશે.

5. પ્રશ્નપત્રનાં ઉપરની જમણી બાજુના આપેલા પ્રશ્નપત્રક સેટ નંબર ને **OMR** પત્રકમાં આપેલી જગ્યામાં લખવાનું રહેશે.

6. રફ કાર્ય હેતુ આ ટેસ્ટ બુકલેટમાં આપેલી જગ્યા પર કરવાનું રહેશે.

7. વિદ્યાર્થીઓ જરૂર જણાય ત્યાં સાદા કેલ્કયુલેટરનો ઉપયોગ કરી શકશે.

1. $|\bar{x}|=|\bar{y}|=1$ અને $|\bar{x}, \hat{\bar{y}}|=\theta$,

તો $|\bar{x}-\bar{y}\cos\theta|=$ .....

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin^2\theta$

(C) $\sin\frac{\theta}{2}$ (D) $\sin\theta$

2. $\bar{x}=(1, k, 3)$ અને $\bar{y}=(2,-1, 5)$ એ પરસ્પર લંબસદિશો હોય,

તો $k=$ .....

(A) 10 (B) 15

(C) 13 (D) 17

3. $|\bar{x}|=2, |\bar{y}|=3, |\bar{z}|=5$ તથા $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=\bar{0}$,

તો $\bar{x}\cdot\bar{y}+\bar{y}\cdot\bar{z}+\bar{z}\cdot\bar{x}=$ .....

(A) -19 (B) -38

(C) 0 (D) 19

4. α, β, γ એ સદિશ $\bar{x}$ ના દિક્‌ખૂણાઓ હોય,

તો $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=$ .....

(A) 2 (B) -1

(C) 0 (D) 1

5. (3, 4) ને લંબ એકમ સદિશ ..... છે.

(A) $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ (B) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

(C) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (D) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

6. $|(\cos\theta\ \sin\alpha, \cos\alpha, -\sin\theta\ \sin\alpha)|=$ .....

(A) 0 (B) -1

(C) 2 (D) 1

7. $\int_1^3 \log x \, dx = ...$

(A) $-2 + \log 9$ (B) $2 + \log 27$

(C) $\log\left(\frac{27}{e}\right)$ (D) $-2 + \log 27$

8. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin x \, dx = ...$

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$

(C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

9. સંકલનની મદદથી વક્ર $y = x$, X-અક્ષ અને રેખાઓ $x = 1$ તથા $x = 10$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) 99 (B) $\frac{99}{2}$

(C) 50 (D) 100

10. વક્ર $y = 5\sin x$; $0 \le x \le \pi/2$, X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) 1 (B) $\frac{5}{2}$

(C) $\frac{1}{5}$ (D) 5

11. વક્રો $y = x^2$ તથા $y = x$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

12. ગોલકના ઘનફળનો તેના પૃષ્ઠફળ S ને સાપેક્ષ વૃદ્ધિ દર ..... થાય.

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(B) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(C) $4\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(D) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

13. એક વસ્તુના x એકમના વેચાણમાંથી થતી કુલ આવક

$R(x) = 10x^2 + 20x + 1500$ દ્વારા મળે છે.

$x = 2015$ હોય, ત્યારે સીમાંત આવક ..... થાય.

(A) 40320 (B) 403

(C) 40300 (D) 4032

14. $\cos^{-1}(-0.49)$ નું આસન્ન મૂલ્ય ..... છે.

(A) $\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$

(B) $\frac{\pi}{3} - \frac{1}{50\sqrt{3}}$

(C) $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{50\sqrt{3}}$

(D) $\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{50\sqrt{3}}$

15. જો $y = f(x) = \sin x$ હોય, તો તેનો વિકલ dy = ...,

જ્યાં $x = \pi/6$, $dx = 0.01$ છે.

(A) $\sqrt{3}$ (0.05)

(B) $\sqrt{3}$ (0.5)

(C) $\sqrt{3}$

(D) $\sqrt{3}$ (0.005)

16. $\int_a^b \frac{\log x}{x}\,dx$ = ... (જ્યાં $a, b \in R^+$)

(A) $\frac{1}{2}\log ab$

(B) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$

(C) $2\log\left(\frac{b}{a}\right)$

(D) $\frac{1}{2}\log(ab)\log\left(\frac{b}{a}\right)$

17. $\int_0^1 x(1-x)^{11}\,dx$ = ...

(A) $\frac{1}{156}$ (B) $\frac{1}{121}$

(C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{132}$

18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$ = ...

(A) $\pi/2$ (B) 0

(C) $-\pi/4$ (D) $\pi/4$

19. $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$ = ...

(A) $\frac{25\pi}{4}$ (B) $\pi/4$

(C) $\frac{25}{4}$ (D) 25π

20. $f(x) = x^{3/5}(4-x)$, $x \in R^+ \cup \{0\}$ ની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ ..... છે.

(A) $0, \frac{3}{2}$

(B) $0, \frac{2}{3}$

(C) $0, -\frac{2}{3}$

(D) $0, -\frac{3}{2}$

21. પદાર્થકણની ગતિનું સમીકરણ $s = t^3 - 6t^2 - 15t$ છે. s મીટરમાં તથા t સેકન્ડમાં છે. તો પદાર્થકણ સ્થિર થાય, ત્યારે $t =$ .....

(A) 1

(B) 5, 1

(C) 0

(D) 5

22. $(at^2, 2at)$ પ્રચલ સમીકરણવાળા વક્રનો સ્પર્શક ..... આગળ X- અક્ષને લંબ છે. $t \in R$.

(A) $(a, 2a)$

(B) $(0, 0)$

(C) $(a, -2a)$

(D) $(4a, 4a)$

23. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ પરના $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ ..... છે.

(A) $y = 1$

(B) $x = 0$

(C) $x = y$

(D) $2x + y = 0$

24. $\int \sqrt{1+\sin\frac{x}{4}}\,dx = \ldots\ldots + c$

(A) $\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}$

(B) $\frac{1}{8}\left(\sin\frac{x}{8}-\cos\frac{x}{8}\right)$

(C) $8\left(\sin\frac{x}{8}-\cos\frac{x}{8}\right)$

(D) $8\left(\sin\frac{x}{8}+\cos\frac{x}{8}\right)$

25. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx = \ldots\ldots + c$

(A) $x\tan x$

(B) $x\tan\frac{x}{2}$

(C) $\frac{x}{2}\tan x$

(D) $\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}$

26. $\int_0^{\pi/4} \tan^{100} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \tan^{102} x\,dx = \ldots.$

(A) $\frac{1}{102}$

(B) $\frac{1}{100}$

(C) 101

(D) $\frac{1}{101}$

27. $x + y + z = 1$ નું $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = P$ સ્વરૂપ ..... છે.

(A) $\frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{y}{2\sqrt{3}} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = 1$

(C) $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $x + y + z = 1$

28. યામાક્ષો સાથે એકરૂપ ખૂણા બનાવતી અને $(2, -3, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું સમીકરણ ..... થાય. $(k \in R)$

(A) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(B) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(C) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k(-1, 1, 1)$

(D) $\bar{r} = (2, -3, 5) + k(1, 1, 1)$

29. $\bar{r}\cdot(1, 2, -1) = 3$ અને $2x - y + 2z = 2$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ .....

(A) $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{9}$ (B) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{6}}{9}$

(C) $\pi - \cos^{-1}\frac{\sqrt{6}}{9}$ (D) $\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2}}$

30. જે રેખાઓની દિક્ સંખ્યાઓ l, m, n અને $m-n, n-l, l-m$ હોય, તેવી રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ ..... છે.

(A) $\pi/6$ (B) $\pi/2$

(C) $\pi/3$ (D) $\pi/4$

31. $\int \frac{e^{5\log x} - e^{3\log x}}{e^{4\log x} - e^{2\log x}}\, dx = \ldots\ldots + c$

(A) $e^3 \log x$

(B) $\frac{x^3}{3}$

(C) $\frac{x^2}{2}$

(D) $e^2 \log x$

32. $\int e^x \left\{\frac{1+(1+x^2)\tan^{-1}x}{1+x^2}\right\} dx = \ldots\ldots + c$

(A) $\frac{x}{1+x^2}$

(B) $e^x \tan^{-1} x$

(C) $\frac{e^x}{1+x^2}$

(D) $x \tan^{-1} x$

33. $\int e^{7x+\log x}\, dx = \ldots\ldots + c$

(A) $\frac{e^{7x}}{49}(7x-1)$

(B) $\frac{e^x}{49}(7x-1)$

(C) e^{7x}

(D) $e^{7x}(7x-1)$

34. X - અંત:ખંડ 4, Y - અંત:ખંડ (– 6), Z - અંત:ખંડ 3 બનાવતા સમતલનું સમીકરણ ..... છે.

(A) $3x - 2y + 4z = 12$

(B) $4x - 6y + 3z = 1$

(C) $4x - 3y + 2z = 12$

(D) $3x - 4y + 6z = 12$

35. સમતલ $2x - z + 1 = 0$ નું સદિશ સમીકરણ ..... છે.

(A) $\bar{r} \cdot (2, -1, 0) + 1 = 0$

(B) $\bar{r} \cdot (2, 0, -1) + 1 = 0$

(C) $\bar{r} \cdot (2, 0, -1) = 1$

(D) $\bar{r} \cdot (2, -1, 0) = 1$

36. $(2, 2, -3)$ અને $(1, 3, 5)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું કાર્તેઝીય સ્વરૂપ ..... છે.

(A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

(B) $\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{8}$

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{-3}$

(D) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{8}$

37. ઊગમબિંદુ થી સમતલ $\bar{r} \cdot (3, 4, 12) = 65$ નું લંબ અંતર ..... છે.

(A) 5

(B) 13

(C) 65

(D) 1

38. વક્રના કોઈ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ અને તે બિંદુના y - યામનો ગુણાકાર એ બિંદુના x - યામ જેટલો હોય, તો તે વક્ર ..... દર્શાવે છે.

(A) પરવલય

(B) ઉપવલય

(C) લંબાતિવલય

(D) વર્તુળ

39. અતિવલય $x^2 - y^2 = 8$ પરના બિંદુ (3, 1) આગળના અવાભિલંબની લંબાઈ ..... છે.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 8

(C) $\frac{1}{8}$ (D) 3

40. એક શહેરની વસ્તીનો વધારો પ્રતિવર્ષ 4% છે, જો t સમયમાં શહેરની વસ્તી p હોય, તો p નું t નાં સ્વરૂપમાં સમીકરણ ..... છે.

(A) $p = 4 \cdot e^{\frac{t}{25}}$ (B) $p = c \cdot e^{\frac{t}{25}}$

(C) $p = \frac{1}{25} e^{4t}$ (D) $p = e^{\frac{t}{25}}$

41. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = -4xy^2$, $y(0) = 1$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ ..... છે.

(A) $x^2 = \frac{1}{y^2}$ (B) $y = x^2 + \log x$

(C) $4e^x + \frac{1}{y^2} = 8$ (D) $y = \left(2x^2 + 1\right) = 1$

42. સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે $[2\bar{x} + 3\bar{y} \quad \bar{x} \quad \bar{y}] =$ .....

(A) $6(\bar{x} \times \bar{y})$ (B) $6\,|\bar{x}|^2$

(C) 1 (D) 0

43. ઉપવલય $x^2 + 4y^2 = 1$ થી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) π (B) 2π

(C) 4π (D) $\pi/2$

44. વક્ર $y^2 = 2x$, Y-અક્ષ અને રેખા $y = 2$ દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ ..... છે.

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{9}{2}$

(C) 8 (D) $\frac{8}{3}$

45. વિકલ સમીકરણ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = \sin y + 3x$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે ..... છે.

(A) 2, 3

(B) 3, વ્યાખ્યાયિત નથી.

(C) વ્યાખ્યાયિત નથી, 2

(D) 3, 2

46. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = y \tan x + e^x$ નો સંકલ્યકારક અવયવ .... છે.

(A) $\sec x$ (B) $\cos x$

(C) $\cot x$ (D) $\sin x$

47. તૃતીય કક્ષાના વિકલ સમીકરણના વિશિષ્ટ ઉકેલમાં આવતાં, સ્વૈર અચળોની સંખ્યા ..... છે.

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 0

48. $\int \left(x^6+7x^5+6x^4+5x^3+4x^2+3x+1\right) e^x \, dx = \ldots. + c$

(A) $\sum_{i=1}^{6} x^i e^x$

(B) $\sum_{i=0}^{6} i \, e^x$

(C) $\sum_{i=0}^{6} (ex)^i$

(D) $\sum_{i=1}^{7} x^i e^x$

49. $\int (1-\cos x)\,\text{cosec}^2 x \; dx = \ldots\ldots\ldots\ldots + c$

(A) $\cot\left(\frac{x}{2}\right)$

(B) $\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(C) $2\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

(D) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

50. $\int \frac{\cot x \; dx}{\sqrt{\cos^4 x+\sin^4 x}} = \ldots\ldots. + c$

(A) $-\frac{1}{2}\log\left|\cot^2 x+\sqrt{\cot^4 x+1}\right|$

(B) $\frac{1}{2}\log\left|\tan^2 x+\sqrt{\tan^4 x+1}\right|$

(C) $-\frac{1}{2}\log\left|\cot x+\sqrt{\cot^4 x+1}\right|$

(D) $\frac{1}{2}\log\left|\cot^2 x+\sqrt{\cot^4 x+1}\right|$

050(G)

(MARCH, 2015)

PART - B

Time : 2 Hours] ***[Maximum Marks : 50***

સૂચનાઓ :

1. સ્પષ્ટ વંચાય તેવું હસ્તલેખન જાળવવું.
2. આ પ્રશ્નપત્રનાં વિભાગ-**B** માં ત્રણ વિભાગ છે અને કુલ **1** થી **18** પ્રશ્નો આપેલા છે.
3. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. આંતરિક વિકલ્પો આપેલા છે.
4. પ્રશ્નની જમણી બાજુના અંક તેના ગુણ દર્શાવે છે.
5. નવો વિભાગ નવા પાના પર લખવો.
6. પ્રશ્નોના જવાબ ક્રમમાં લખવા.
7. વિદ્યાર્થીઓ જરૂર જણાય ત્યાં સાદા કેલ્કયુલેટરનો ઉપયોગ કરી શકશે.

વિભાગ - A

● નીચે આપેલ **1** થી **8** પ્રશ્નોના જવાબો માંગ્યા મુજબ આપો. દરેક પ્રશ્નના **2** ગુણ છે. **16**

1. $f(x) = 6x + 3\cot x$ ના મહત્તમ તથા ન્યૂનતમ મૂલ્યો શોધો, જ્યાં $x \in (0, \pi)$.
2. $xy + ax + by = 2$ પરનાં $(1, 1)$ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ 5 છે, તો a અને b મેળવો.
3. $\int x\sqrt{x^4+64}\,dx$ મેળવો.
4. $\int \frac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1+e^{-x}}}\,dx$ મેળવો.
5. વક્ર $y = x^2 - 3x + 2$ નું X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

   અથવા

   પરવલય $y = x^2 + 2$ તથા રેખાઓ $y = x$, $x = 3$ અને $x = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. એકમ સદિશો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ માટે સાબિત કરો કે $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left|\bar{x}+\bar{y}\right|$, જ્યાં $\left(\bar{x}, \hat{\ }\bar{y}\right) = \alpha$.
7. $(a_1, 1, 1)$, $(1, a_2, 1)$, $(1, 1, a_3)$ સમતલીય સદિશો હોય, તો સાબિત કરો કે $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1-a_i} = 1$.
8. રેખા $x = 3z + 2$, $y = 2 - 5z$ ની દિક્કોસાઈન શોધો.

   અથવા

   સાબિત કરો કે $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{5}$ તથા $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ વિષમતલીય રેખાઓ છે.

વિભાગ - B

● નીચેના **9** થી **14** સુધીના પ્રશ્નોના માગ્યા મુજબ જવાબ આપો. દરેક પ્રશ્નનાં **3** ગુણ છે. **18**

9. સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_a^b \sin x \, dx$ મેળવો.

અથવા

કિંમત મેળવો : $\int_{-1}^{2} |2x-1| \, dx$

10. બે વર્તુળો $x^2 + y^2 = 1$ અને $(x-1)^2 + y^2 = 1$ વડે આવૃત્ત સામાન્ય પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવો.

11. વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$ નો ઉકેલ મેળવો.

અથવા

પ્રારંભિક શરત $y(e) = 0$ ને આધીન વિકલ સમીકરણ $x \cdot e^{y/x} - y + x\frac{dy}{dx} = 0$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.

12. સદિશની મદદથી સાબિત કરો કે $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

13. જો કોઈ રેખા સમઘનના વિકર્ણો સાથે $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ માપના ખૂણા બનાવે,

તો સાબિત કરો કે $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$.

14. બિંદુ $(1, 5, 1)$ નું સમતલ $x - 2y + z + 5 = 0$ ની સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ મેળવો.

વિભાગ - C

● નીચેના **15** થી **18** સુધીના પ્રશ્નોના માંગ્યા મુજબ જવાબ આપો. દરેક પ્રશ્નનાં **4** ગુણ છે. **16**

15. પાણીની એક ટાંકી ઊંધા શંકુ આકારની છે. તેના પાયાની ત્રિજ્યા 8 મીટર તથા ઊંચાઈ 12 મીટર છે. ટાંકીને સફાઈ માટે 4 મી^{3} / મિનિટ નાં દરથી ખાલી કરવામાં આવી રહી છે. જ્યારે પાણીની ઊંડાઈ 6 મીટર હોય, ત્યારે પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ ઘટવાનો દર શોધો.

16. $\int e^{4x} \sin 8x \cos x \, dx$ મેળવો.

અથવા

$\int \frac{(3x+2)}{(x+1)(x+2)(x-3)} \, dx$ મેળવો.

17. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right) dx$ ની કિંમત મેળવો.

18. એક ઓરડામાં મૃતદેહનું તાપમાન 100° F છે. 5 મિનિટ બાદ મૃતદેહનું તાપમાન 50° F થાય છે. ત્યારબાદ બીજી 5 મિનિટ પછી તેનું તાપમાન 40° F થાય છે, તો તેના આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન શોધો.

SUBJECT:	50		MEDIUM:	G

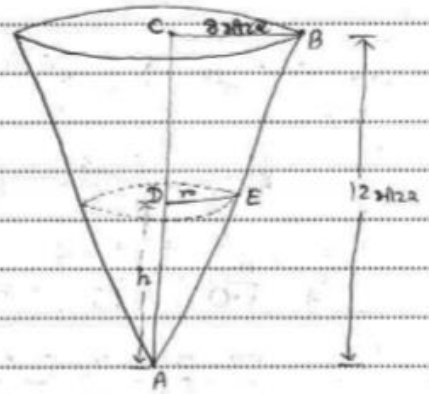
QUE	ANS	QUE	ANS	QUE	ANS
1	D	21	D	41	X
2	D	22	B	42	D
3	A	23	C	43	D
4	B	24	C	44	A
5	B	25	B	45	A
6	D	26	D	46	B
7	D	27	C	47	D
8	A	28	D	48	A
9	B	29	D	49	D
10	D	30	B	50	A
11	D	31	C		
12	B	32	B		
13	A	33	A		
14	A	34	A		
15	D	35	B		
16	D	36	D		
17	A	37	A		
18	B	38	C		
19	A	39	D		
20	A	40	B		

વિભાગ.....

પ્રશ્ન ક્રમાંક

વિભાગ – C

(15)



આકૃતિ મુજબ કોઈ t સમયે પાણીથી બનતા શંકુની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h હોય, તો

ત્રિકોણો ΔADE અને ΔACB ની સમરૂપતા પરથી,

$$\frac{8}{r} = \frac{12}{h}$$

$$\therefore r = \frac{8h}{12}$$

$$\therefore r = \frac{2h}{3} \quad \text{——— (1)}$$

હવે આ સમયે શંકુનું ઘનફળ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

વિભાગ.....

$\therefore V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{3}\right)^2 h$ (∵ સમી (1) પરથી)

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4h^2}{9}\right)h$

$\therefore V = \frac{4\pi}{27}h^3$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{27}(3h^2)\frac{dh}{dt}$

$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$

અહીં $h = 6$ મીટર ત્યારે $\frac{dV}{dt} = -4$ મી^{3}/મિનિટ

$\therefore -4 = \frac{4\pi(6)^2}{9}\frac{dh}{dt}$

$\therefore \frac{dh}{dt} = -\frac{9}{36\pi}$

$\therefore \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{4\pi}$ મી/મિનિટ

∴ પાણીની સપાટીની ઊંચાઈ ઘટવાનો દર $\frac{1}{4\pi}$ મીટર/મિનિટ છે.

(16) $I = \int \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

ધારો કે $\frac{3x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$

બંને બાજુ $(x+1)(x+2)(x-3)$ વડે ગુણતાં,

$3x+2 = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2)$

હવે, $x = -1$ લેતાં, $-3+2 = A(1)(-4)$

$\therefore A = \frac{1}{4}$

વિભાગ.....

$x=-2$ લેતાં, $3(-2)+2 = B(-1)(-5)$

$\therefore B = \frac{-4}{5}$

$x=3$ લેતાં, $3(3)+2 = C(4)(5)$

$\therefore C = \frac{11}{20}$

$$\therefore \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1/4}{x+1} + \frac{-4/5}{x+2} + \frac{11/20}{x-3}$$

$$\therefore I = \int \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-4/5}{x+2} + \frac{\frac{11}{20}}{x-3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{11}{20}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{4}{5}\log|x+2| + \frac{11}{20}\log|x-3| + c}$$

(અહીં c સ્વૈર અચળ.)

(17)

$$I = \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x+x^2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x(1-x)}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{x+(1-x)}{1-x(1-x)}\right)dx$$

$$I = \int_0^1 \left(\tan^{-1}x + \tan^{-1}(1-x)\right)dx \qquad \left(\because \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<1-x<1 \\ 0<x(1-x)<1 \end{matrix} \text{ માટે}\right)$$

$$\therefore I = \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x)\,dx$$

વિભાગ.....

6

$$= \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-(1-x))\,dx \quad (x \text{ ને બદલે } 1-x \text{ મુકતાં})$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx + \int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1}x \cdot dx$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1}x \cdot 1\,dx$$

$$= 2\left[\tan^{-1}x \int 1\,dx - \int\left(\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int 1\,dx\right)dx\right]_0^1$$

$$= 2\left[\tan^{-1}x \cdot (x) - \int \frac{1}{1+x^2}(x)\,dx\right]_0^1$$

$$= 2\left[x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx\right]_0^1$$

$$= 2\left[x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log|1+x^2|\right]_0^1$$

$$= 2\left[\tan^{-1}1 - \frac{1}{2}\log 2 - 0 - \frac{1}{2}\log(1)\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2\right]$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{\pi}{2} - \log 2}$$

(18) ધારો કે t સમયે ચંદ્રકણનું તાપમાન T છે અને વાતાવરણનું અચળ તાપમાન S છે.

∴ ન્યૂટનના ઠંડીકરણના નિયમ અનુસાર,

$$\frac{dT}{dt} \propto (T-S)$$

વિભાગ.....

$$\therefore \frac{dT}{dt} = -k(T-S) \qquad (k>0)$$

$$\therefore \frac{dT}{T-S} = -k\,dt$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int \frac{dT}{T-S} = \int -k\,dt$$

$$\therefore \log(T-S) = -kt + c \qquad \text{---(i)}$$

જ્યારે $t=0$ ત્યારે $T = 100°F$

$$\therefore \log(100-S) = -k(0) + c$$

$$\therefore c = \log(100-S)$$

આ કિંમત સમી.(i) માં મુકતાં,

$$\log(T-S) = -kt + \log(100-S) \qquad \text{---(ii)}$$

જ્યારે $t=5$ ત્યારે $T = 50°F$

$$\therefore \log(50-S) = -5k + \log(100-S) \qquad \text{---(iii)}$$

જ્યારે $t=10$ ત્યારે $T = 40°F$

$$\therefore \log(40-S) = -10k + \log(100-S) \qquad \text{---(iv)}$$

સમી. (iii) ને 2 વડે ગુણી સમી. (iv) માંથી બાદ કરતાં,

$$2\log(50-S) = -10k + 2\log(100-S)$$

$$\log(40-S) = -10k + \log(100-S)$$

$$- \quad + \quad -$$

$$2\log(50-S) - \log(40-S) = \log(100-S)$$

$$\therefore \log(50-S)^2 = \log(100-S) + \log(40-S)$$

$$\therefore (50-S)^2 = (100-S)(40-S)$$

વિભાગ.....

8

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$\therefore\ 2500 + s^2 - 100s = 4000 - 140s + s^2$

$\therefore\ 40s = 4000 - 2500$

$\therefore\ 40s = 1500$

$\therefore\ \boxed{s = 37.5\ ^\circ F}$

$\therefore$ આસપાસના વાતાવરણનું અચળ તાપમાન

$37.5\ ^\circ F$ છે.

વિભાગ.....

9

પ્રશ્ન ક્રમાંક

વિભાગ – B

(9) $I = \int_{-1}^{2} |2x-1|\, dx$

$f(x) = |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore\ I = \int_{-1}^{1/2} |2x-1|\, dx + \int_{1/2}^{2} |2x-1|\, dx$

$= \int_{-1}^{1/2} (-2x+1)\, dx + \int_{1/2}^{2} (2x-1)\, dx$

$= \left(-2\frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{1/2} + \left(2\frac{x^2}{2} - x\right)_{1/2}^{2}$

$= \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - (-1-1)\right] + \left[(4-2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$

$= \left[2 + \frac{3}{4}\right] + \left[2 + \frac{1}{4}\right]$

$= \frac{9}{4} + \frac{9}{4}$

$\therefore\ \boxed{I = \frac{9}{2}}$

(10) વર્તુળ $x^2+y^2=1$ અને $(x-1)^2+y^2=1$ ના છેદબિંદુ માટે,
$x^2 = 1-y^2$ અને $(x-1)^2 = 1-y^2$ સરખાવતા,
$x^2 = (x-1)^2$
$\therefore\ x^2 = x^2 - 2x + 1$
$\therefore\ 2x = 1$
$\therefore\ x = \frac{1}{2}$

વિભાગ.....

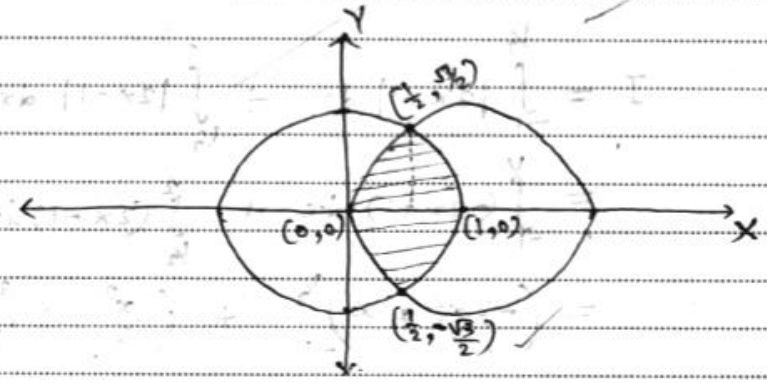
10

$\therefore$ $x^2+y^2=1$ માં $x=\frac{1}{2}$ મૂકતાં,

$\frac{1}{4}+y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ છેદબિંદુઓ $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ અને $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ થશે.



$\rightarrow$ બંને વર્તુળો x અક્ષ પર્યે સંમિત હોવાથી,

માંગેલ ક્ષેત્રફળ = 2 × પ્રથમ ચરણમાં આવેલ ક્ષેત્રફળ

$= 2|I|$

જ્યાં $I=\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(g_1(y)-g_2(y)\right)dy$

અહીં $g_1(y)=1-\sqrt{1-y^2}$ $\left(\because (x-1)^2+y^2=1$ પરથી,
$x-1=\pm\sqrt{1-y^2}$ લેતાં $x-1$ ઋણ
થશે તે સ્વીકાર્ય છે. $(0<x<1)\right)$

$g_2(y)=\sqrt{1-y^2}$ $\left(\because x^2+y^2=1$ માટે પ્રથમ ચરણમાં
$y>0\right)$

$\therefore I=\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(1-\sqrt{1-y^2}-\sqrt{1-y^2}\right)dy$

$=\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(1-2\sqrt{1-y^2}\right)dy$

વિભાગ.....

$$= \left[y - 2\left(\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1} y \right) \right]_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \left[y - y\sqrt{1-y^2} - \sin^{-1} y \right]_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{3}{4}} - \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - 0 - 0 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{3}$$

$\therefore I = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 2|I| = 2\left|\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\right|$

$= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(11) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y)$

$x + y = t$ આદેશ લેતાં,

$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$

$\therefore \frac{dt}{dx} - 1 = \sin t$

$\therefore \frac{dt}{dx} = 1 + \sin t$

$\therefore \frac{dt}{1+\sin t} = dx$

વિભાગ.....

$$\therefore \int \frac{1-\sin t}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\,dt = dx$$

$$\therefore \frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}\,dt = dx$$

$$\therefore \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,dt = dx$$

$$\therefore (\sec^2 t - \sec t \tan t)\,dt = dx$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\int (\sec^2 t - \sec t \tan t)\,dt = \int dx$$

$$\therefore \tan t - \sec t = x + c \qquad (c \text{ એ અચળ})$$

$$\therefore \boxed{\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c} \quad \text{Ans.}$$

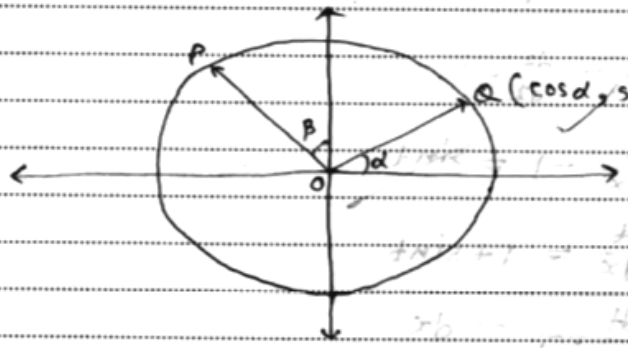
$(\because t = x+y \text{ મૂકતાં})$

(12)

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right) \qquad (1)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right)$$

$$\therefore \sin(\alpha-\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right) \qquad \text{(i)}$$



વિભાગ.....

13

પ્રશ્ન ક્રમાંક

આકૃતિ મુજબ એકમ વર્તુળ પર α કોણે Q બિંદુ અને $\frac{\pi}{2}+\beta$ કોણે P બિંદુ લેતા,

$$P\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right) = P(-\sin\beta, \cos\beta)$$

અને $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = (\cos\alpha, \sin\alpha) - (0,0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\overrightarrow{OP} = (-\sin\beta, \cos\beta) - (0,0) = (-\sin\beta, \cos\beta)$$

વળી, $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$

અહીં $\overrightarrow{OP}$ અને $\overrightarrow{OQ}$ વચ્ચેનો ખૂણો $\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha\right)$ થશે.

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta-\alpha\right) = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}$$

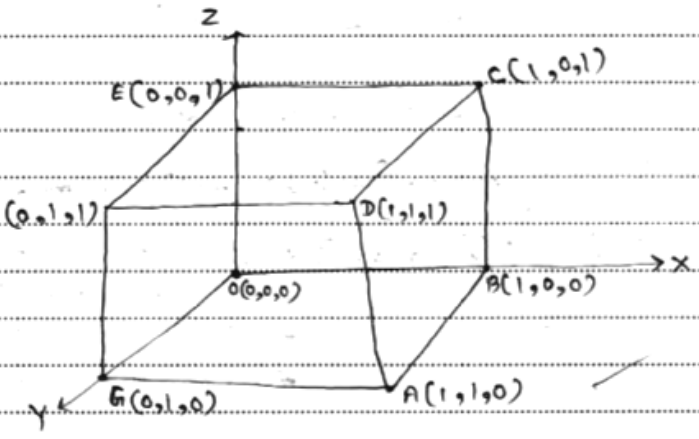
$$\therefore \sin(\alpha-\beta) = \frac{(-\sin\beta, \cos\beta)\cdot(\cos\alpha, \sin\alpha)}{(1)(1)}$$

[∵ સમી (i)]

$$\therefore \sin(\alpha-\beta) = -\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

$$\therefore \boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

(13)



વિભાગ.....

14

પ્રશ્ન ક્રમાંક

ઘનાકૃતિ મુજબના , જો દોરો કે સમઘનના ઊભા કર્ણોની દિશાઓ

એકરૂપ છે.

અહીંથી તેના વિકર્ણના રૂપમાં ઘનાકૃતિ મુજબ પથ્થો

હવે $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{FB}$ અને $\overrightarrow{AE}$ તેના વિકર્ણો પથ્થો,

$\overrightarrow{OD} = (1,1,1)$

$\overrightarrow{GC} = (1,-1,1)$

$\overrightarrow{FB} = (-1,1,1)$

$\overrightarrow{AE} = (-1,-1,1)$

દોરો કે આપેલ રેખાના દિક્ કોસાઈન

(l,m,n) છે.

$\therefore l^2+m^2+n^2 = 1$ ——(1)

હવે રેખા $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{AE}$ માંથી દરેક

α , β , γ , δ ખૂણાનો ગણાય છે.

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{|(l,m,n)\cdot(1,1,1)|}{(1)(\sqrt{3})}$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{|l+m+n|}{\sqrt{3}}$

તે જ રીતે , $\cos\beta = \dfrac{|l-m+n|}{\sqrt{3}}$

$\cos\gamma = \dfrac{|-l+m+n|}{\sqrt{3}}$

$\cos\delta = \dfrac{|-l-m+n|}{\sqrt{3}}$

હવે , $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta$

$= \dfrac{1}{3}\left((l+m+n)^2+(-l+m+n)^2+(-l-m+n)^2+(l-m+n)^2\right)$

$= \dfrac{1}{3}\Big[4(l^2+m^2+n^2) + 2lm+2mn+2ln$
$-2lm+2mn-2ln$
$+2lm-2mn-2ln$
$+2lm-2mn+2ln\Big]$

વિભાગ.....

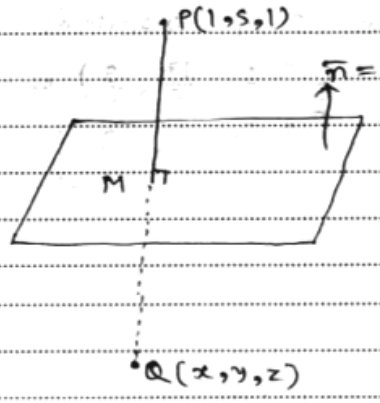
15

$= \frac{1}{3}\left(4\left(l^2+m^2+n^2\right)\right)$

$= \frac{4}{3}(1)$ $\left(\because l^2+m^2+n^2=1\right)$

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = \frac{4}{3}$

(14)



દર્શાવો કે P માંથી સમતલ પરનો દોરેલો લંબપાદ M છે અને Q(x,y,z) એ P નું સમતલ સાપેક્ષ પ્રતિબિંબ છે.

એમ PM ની દિશા $\vec{l} = \vec{n} = (1,-2,1)$ લઈ શકાય.

∴ એમ PM નું સમીકરણ

$\vec{r} = (1,5,1) + k(1,-2,1)$ $k \in R$

હવે $M \in \overleftrightarrow{PM}$ હોવાથી કોઈક $k \in R$ માટે,

M (1+k, 5−2k, 1+k) મળે.

વળી, $M \in \pi$ $(\pi : x-2y+z+5=0)$

∴ $(1+k)-2(5-2k)+(1+k)+5=0$

∴ $1+k-10+4k+1+5+k=0$

∴ $6k=3$

∴ $k=\frac{1}{2}$

∴ $M\left(1+k, 5-2k, 1+k\right) = \left(\frac{3}{2}, 4, \frac{3}{2}\right)$

વળી, M એ PQ નું મધ્યબિંદુ થશે.

16

વિભાગ.....

$\therefore \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+5}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = \cancel{\left(\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, \frac{7}{5}\right)} \left(\frac{3}{2}, 4, \frac{3}{2}\right)$

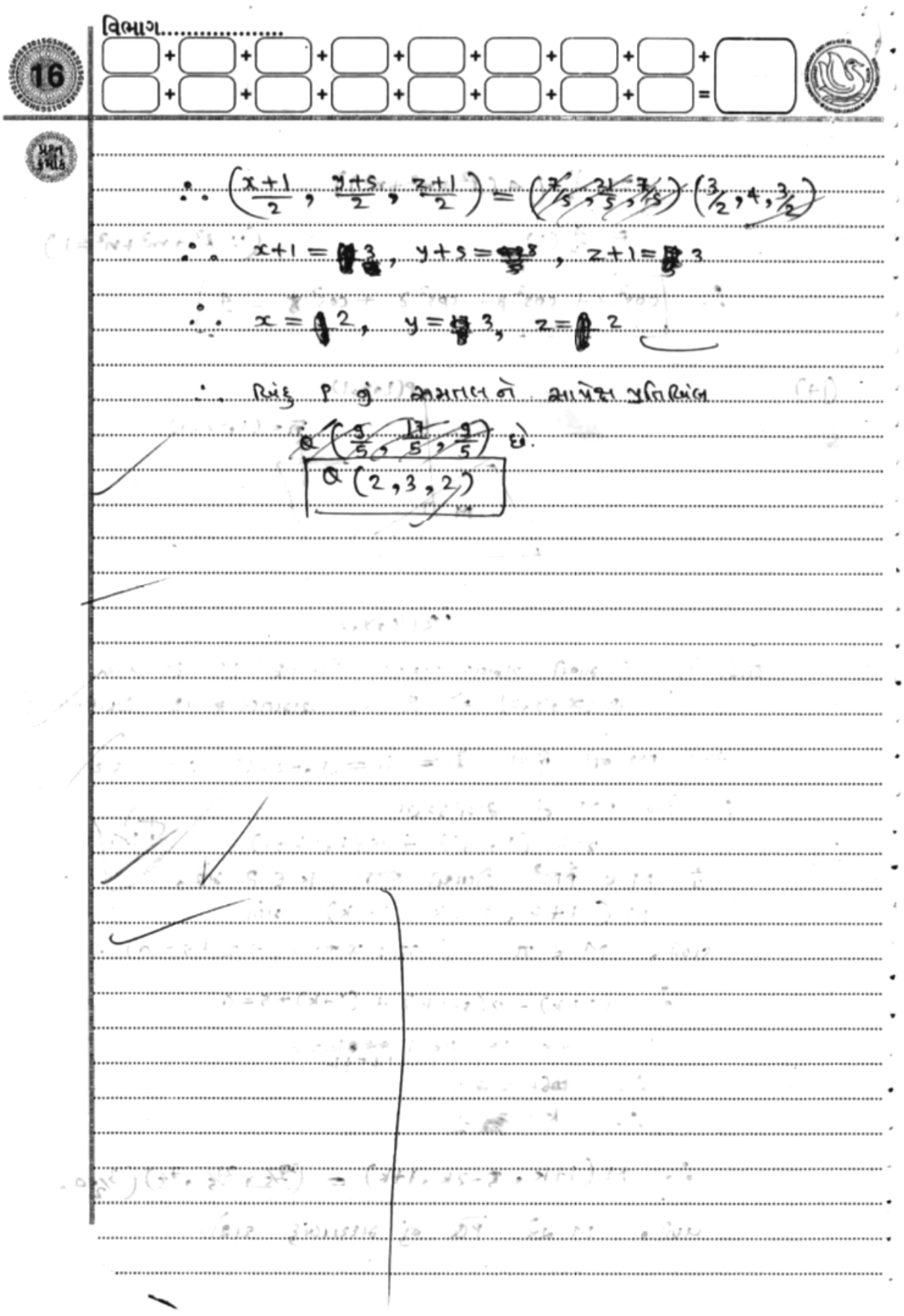
$\therefore x+1 = 3, \quad y+5 = 8, \quad z+1 = 3$

$\therefore x = 2, \quad y = 3, \quad z = 2$

$\therefore$ ખિંદુ P નું અમતલ ને આપેક્ષ પ્રતિબિંબ

$\cancel{Q\left(\frac{9}{5}, \frac{17}{5}, \frac{9}{5}\right)}$ છે.

$\boxed{Q(2, 3, 2)}$



વિભાગ.....

17

વિભાગ - A

(1) $f(x) = 6x + 3\cot x \qquad x \in (0, \pi)$

$\therefore f'(x) = 6 - 3\,\text{cosec}^2 x$

$\therefore f''(x) = -3(2)\,\text{cosec}\,x\,(-\text{cosec}\,x\cot x)$

$= 6\,\text{cosec}^2 x\cot x$

હવે $f'(x) = 0 \Rightarrow 6 - 3\,\text{cosec}^2 x = 0$

$\Rightarrow 6 = 3\,\text{cosec}^2 x$

$\Rightarrow \text{cosec}^2 x = 2$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($x \in (0,\pi)$ માટે $\sin x > 0$)

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ અથવા $\frac{3\pi}{4}$

હવે, $f'(\pi/4) = 6(2)(1) > 0$

$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6(2)(-1) < 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ આગળ વિધેયનો સ્થાનિક મહત્તમ મૂલ્ય

$f(\pi/4) = 6\frac{\pi}{4} + 3(1) = \frac{3\pi}{2} + 3$

$x = \frac{3\pi}{4}$ આગળ વિધેયનો સ્થાનિક લઘુત્તમ મૂલ્ય

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 3(-1) = \frac{9\pi}{2} - 3$ મળે.

(2) $xy + ax + by = 2$ નો બિંદુ $(1,1)$ છે.

$\therefore 1 + a + b = 2$

$\therefore a + b = 1$ ——— (1)

હવે $xy + ax + by = 2$ માટે,

વિભાગ.....

18

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$x\frac{dy}{dx} + y + a + b\frac{dy}{dx} = 0$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = 5$ આપેલ છે.

$\therefore (1)(5) + 1 + a + b(5) = 0$

$\therefore 5b + a = -6$ ——— (ii)

અમા. (ii) માંથી (i) બાદ કરતા,

$4b = -7$

$\therefore b = -\frac{7}{4}$ $\Rightarrow$ $a+b=1$ પરથી

$a = 1 - b = 1 + \frac{7}{4}$

$\therefore a = \frac{11}{4}$

$\therefore$ $\boxed{a = \frac{11}{4}}$ અને $\boxed{b = -\frac{7}{4}}$

(3) $I = \int x\sqrt{x^4+64}\,dx$

$x^2 = t$ લેતા,

$2x\,dx = dt$

$\therefore x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$\therefore I = \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+64}\,dt$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+64} + \frac{64}{2}\log\left(t+\sqrt{t^2+64}\right)\right] + c$

$= \frac{t}{4}\sqrt{t^2+64} + 16\log\left|t+\sqrt{t^2+64}\right| + c$

હવે ($t = x^2$ મૂકતાં,)

$\therefore \boxed{I = \frac{x^2}{4}\sqrt{x^4+64} + 16\log\left|x^2+\sqrt{x^4+64}\right| + c}$

(c સ્વૈર અચળ)

વિભાગ.....

19

(4) $I = \int \frac{(e^x - 1)}{(e^x + 1)\sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}\, dx$

$= \int \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2 \sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}\, dx$

$= \int \frac{(e^{2x} - 1)\, dx}{(e^x + 1)^2 \sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}$

$= \int \frac{(e^{2x} - 1)\, dx}{(e^{2x} + 2e^x + 1)\sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}$

$= \int \frac{(e^{2x} - 1)/e^x\, dx}{\left(\frac{e^{2x} + e^x + e^x + 1}{e^x}\right)\sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}$

$= \int \frac{(e^{2x} - 1)/e^x\, dx}{(e^x + 1 + 1 + e^{-x})\sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}$

$\therefore I = \int \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\, dx}{(e^x + 1 + e^{-x} + 1)\sqrt{e^x + 1 + e^{-x}}}$

હવે $e^x + 1 + e^{-x} = t^2$ લેતાં,

$(e^x + 0 - e^{-x})dx = 2t\, dt$

$\therefore \left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) dx = 2t\, dt$

$\therefore \frac{e^{2x} - 1}{e^x}\, dx = 2t\, dt$

$\therefore I = \int \frac{2t\, dt}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2}}$

વિભાગ.....

20

પ્રશ્ન ક્રમાંક

$$\therefore I = 2\int \frac{t}{(t^2+1)t}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\tan^{-1} t + c$$

$t = e^x + 1 + e^{-x}$ મૂકતાં,

$$\therefore \boxed{I = 2\tan^{-1}(e^x+1+e^{-x}) + c}$$

(c સ્વૈર અચલ)

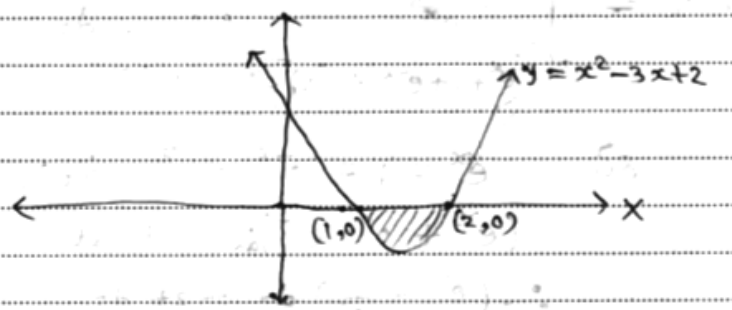
(5) વક્ર $y = x^2 - 3x + 2$ ના x-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુ માટે,

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore (x-2)(x-1) = 0$

$\therefore x = 2$ અથવા $x = 1$

$\therefore$ છેદબિંદુઓ $(1,0)$, $(2,0)$ છે.



આથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= |I|$

જ્યાં $I = \int_1^2 y\,dx$

વિભાગ.....

21

$$= \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{3} - 6 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2\right]$$

$$= \left(\frac{7}{3} - 4 + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{14 - 24 + 9}{6}$$

$$I = -\frac{1}{6}$$

$\therefore$ માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= |I| = \frac{1}{6}$

(6) $|\bar{x} + \bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2 + 2\,\bar{x}\cdot\bar{y}$

$= 1 + 1 + 2|\bar{x}||\bar{y}|\cos\alpha$

($\because |\bar{x}| = |\bar{y}| = 1$ અને $\cos\alpha = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}||\bar{y}|}$ પરથી)

$= 2 + 2\cos\alpha$ ($\because |\bar{x}| = |\bar{y}| = 1$)

$= 2(1 + \cos\alpha)$

$\therefore |\bar{x} + \bar{y}|^2 = 2 \times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore |\bar{x} + \bar{y}| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ ($\because 0 \le \alpha \le \pi$ માટે $0 \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{2}$ $\therefore \cos\frac{\alpha}{2} > 0$)

$\therefore \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}|\bar{x} + \bar{y}|$

વિભાગ.....

22

પ્રશ્ન ક્રમાંક

(7) $(a_1, 1, 1)$, $(1, a_2, 1)$, $(1, 1, a_3)$ સમતલમાં છે.

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 1 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_1-1 & 1-a_2 & 0 \\ 0 & a_2-1 & 1-a_3 \\ 1 & 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\because R_{21}(-1),\ R_{32}(-1)\right)$$

$$\therefore (a_1-1)\left[a_3(a_2-1)-(1-a_3)\right] - (1-a_2)\left[-(1-a_3)\right] = 0$$

$$\therefore (a_1-1)a_3(a_2-1) - (a_1-1)(1-a_3) + (1-a_2)(1-a_3) = 0$$

$$\therefore a_3(1-a_1)(1-a_2) + (1-a_1)(1-a_3) + (1-a_2)(1-a_3) = 0$$

બંને $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)$ વડે ભાગતાં,

$$\frac{a_3}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 0$$

$$\therefore 1 + \frac{a_3}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 0 + 1$$

$$\therefore \frac{1-a_3+a_3}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{1-a_3} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_1} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{1-a_3} = 1$$

$$\therefore \boxed{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1-a_i} = 1}$$

વિભાગ.....

(8)

$x = 3z + 2$ પરથી $y = 2 - 5z$

$\therefore x - 2 = 3z$ પરથી $y - 2 = -5z$

$\therefore z = \frac{x-2}{3}$ પરથી $\frac{y-2}{-5} = z$

$\therefore \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{1}$

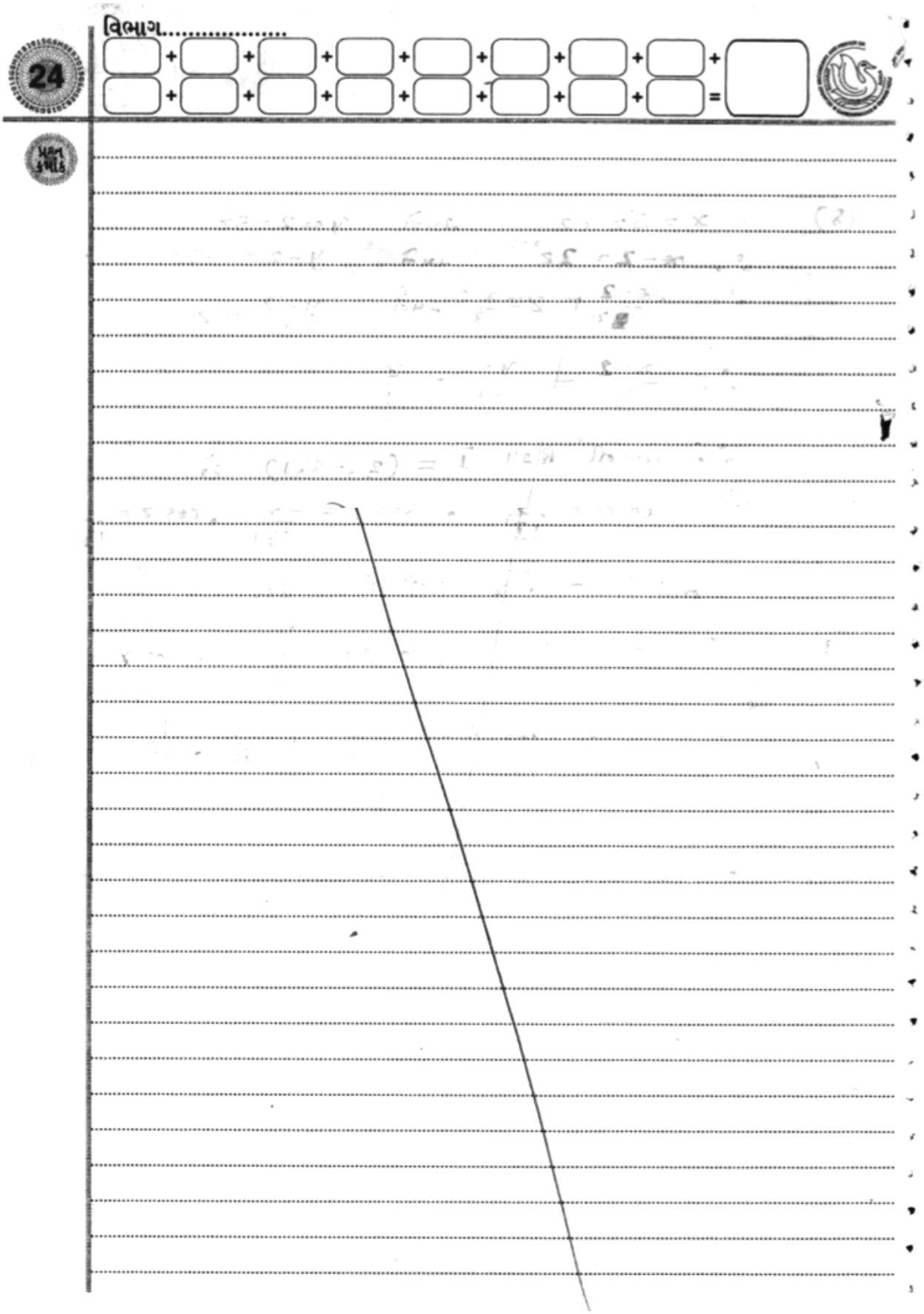
$\therefore$ રેખાની દિશા $\bar{I} = (3, -5, 1)$ છે.

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{|\bar{I}|}$, $\cos\beta = \frac{-5}{|\bar{I}|}$, $\cos\gamma = \frac{1}{|\bar{I}|}$

અને $|\bar{I}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$, $\cos\beta = -\frac{5}{\sqrt{35}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{35}}$

$\therefore$ રેખાના દિક્કોસાઈન $\frac{3}{\sqrt{35}}, -\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}$ છે.

વિભાગ.....

24